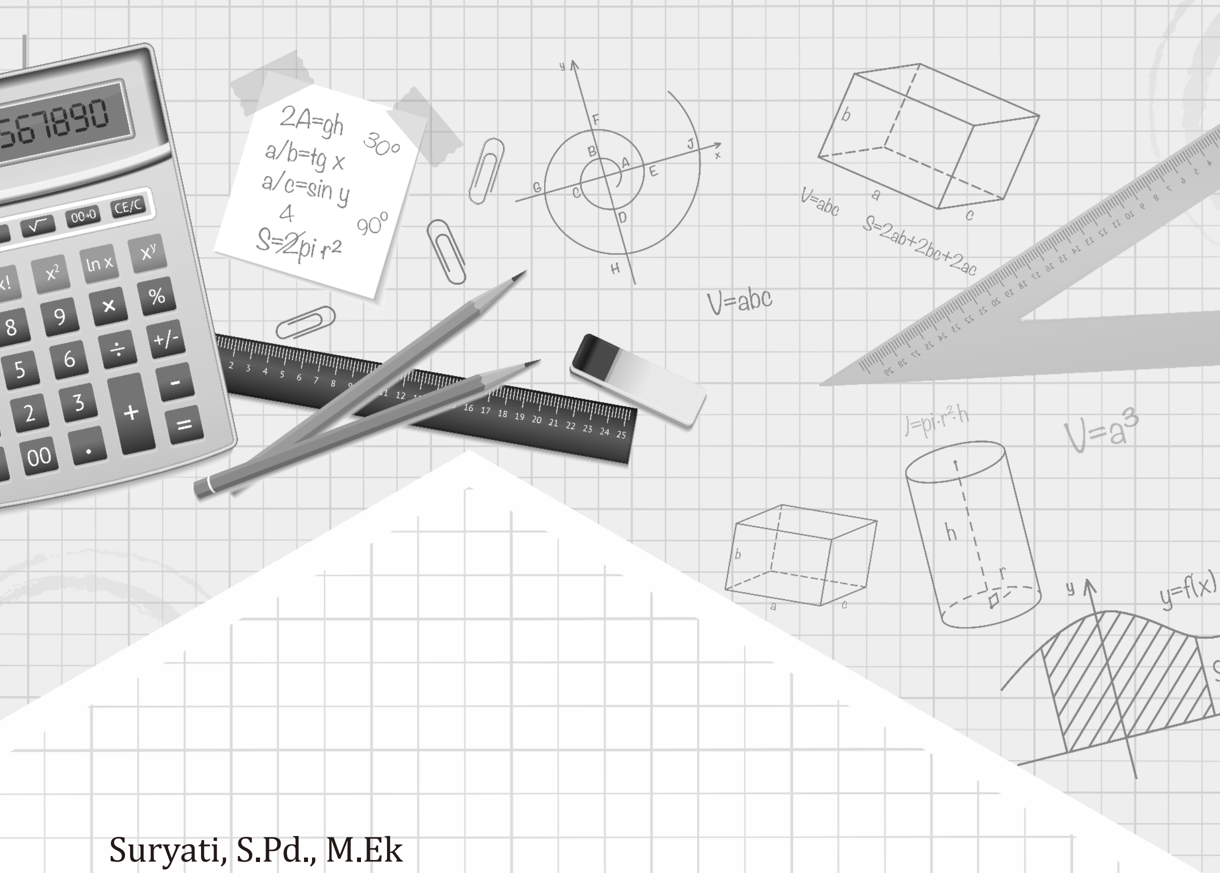


Suryati, S.Pd., M.Ek

MATEMATIKA UNTUK BISNIS DAN EKONOMI

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4
Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.
Pembatasan Pelindungan Pasal 26
Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000.00 (lima ratus juta rupiah).

MATEMATIKA UNTUK BISNIS DAN EKONOMI

Suryati, S.Pd., M.Ek

GERBANGMEDIA

MATEMATIKA UNTUK BISNIS DAN EKONOMI

Suryati, S.Pd., M.Ek

Desain Cover :
Tim Gerbang Media Aksara

Tata Letak :
Tim Gerbang Media Aksara

Editor :
Tim Gerbang Media Aksara

Ukuran :
xii + 102: 15.5x23 cm

ISBN : 978-623-8100-11-8

Cetakan Pertama :
Oktober 2022

PENERBIT GERBANG MEDIA AKSARA
(Anggota IKAPI (142/DIY/2021)
Jl. Wonosari Km 07, Banguntapan, Yogyakarta
Telp/Faks: (0274) 4353671/081578513092
Website: www.gerbangmediaaksara.com
Bekerjasama dengan
Fakultas Ekonomi dan Bisnis Islam
UIN Raden Mas Said Surakarta

PRAKATA

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Puji syukur atas segala nikmat yang Allah berikan kepada saya, hingga buku Matematika untuk Bisnis dan Ekonomi ini dapat tersusun sebagai referensi bagi mahasiswa. Buku ini dibuat sebagai bahan ajar Matematika untuk Bisnis dan Ekonomi bagi mahasiswa Fakultas Ekonomi dan Bisnis Islam UIN Raden Mas Said Surakarta. Secercah tujuan yang ingin dicapai dalam buku ini yaitu memudahkan pembaca untuk memahami penerapan ilmu matematika secara luas dan mendalam dalam aplikasi ilmu-ilmu ekonomi.

Buku ini disajikan dengan bahasa yang ringan agar pembaca lebih tertarik untuk mendalami penerapan ilmu matematika untuk ekonomi dan bisnis. Pembaca dapat memperkaya wawasan dengan Latihan soal yang diberikan dan dilengkapi dengan studi kasus berbasis kekinian.

Penulis sangat terbuka kepada berbagai pihak demi perbaikan dan kesempurnaan lebih lanjut dari buku ini. Oleh karena itu, saran, kritik dan evaluasi yang bersifat membangun sangat penulis harapan demi perkembangan ilmu, khususnya Matematika untuk Bisnis dan Ekonomi. Penulis mengucapkan terima kasih pada semua pihak atas masukan dan respon dikemudian hari.

Wassalamu'alaikum *warahmatullahi wabarakatuh*

Sukoharjo, 15 Oktober 2022

Suryati, S.Pd, M.E.K

DAFTAR ISI

BAB 1: HIMPUNAN DAN SISTEM BILANGAN KONSEP HIMPUNAN 1
A. Konsep Himpunan 1
1. Operasi Himpunan 1
2. Penyajian himpunan 4
3. Himpunan Universal dan Himpunan Kosong 4
B. Sistem Bilangan 5
1. Operasi Bilangan 6
2. Operasi Tanda 7
3. Operasi Bilangan Pecahan 7

BAB 2: DERET HITUNG DAN DERET UKUR 9
A. Pengertian Deret 9
B. Deret Hitung 9
1. Suku ke-n 9
2. Jumlah “n” suku Deret Hitung 10
C. Deret Ukur 11
1. Suku ke-n Deret Ukur 11
2. Deret Ukur – Jumlah n Suku 12
D. Penerapan Deret dalam Ekonomi 13
1. Model Perkembangan Usaha 13
2. Model Pertumbuhan Penduduk 14
3. Menghitung nilai sekarang dan yang akan datang (Anuitas) 16

BAB 3: FUNGSI LINIER 22
A. Fungsi 22
B. Jenis – Jenis Fungsi 23

1. Fungsi linier 23
2. Lereng dan Penggal 23
3. Pembentukan Persamaan Linier 25
4. Hubungan Dua Garis Lurus 27
5. Pencarian Akar-Akar Persamaan Linear 29
C. Penerapan Fungsi Linier dalam Ekonomi 32
1. Fungsi Permintaan 32
2. Fungsi Penawaran 35
3. Keseimbangan Pasar 37
4. Keseimbangan Pasar Setelah Pajak dan Subsidi 39

BAB 4: FUNGSI NON LINEAR 44
A. Fungsi Non Linear 44
1. Fungsi Kuadrat Parabolik Sejajar Sumbu Vertikal 44
2. Fungsi Kuadrat Parabolik Sejajar Sumbu Horizontal 45
3. Fungsi Kubik 46
B. Sifat-Sifat Fungsi Non Linier 46
1. Penggal 47
2. Simetri 47
3. Perpanjangan 48
4. Asimtot 49
5. Faktorisasi 49
C. Penerapan Fungsi Non Linier dalam Ekonomi 50
1. Fungsi Biaya 50
2. Biaya tetap 50
3. Biaya variabel 51
4. Biaya rata-rata 51
5. Biaya marginal 52
6. Kasus Fungsi Biaya Parabolik 52

7. Fungsi Kubik 54
8. Fungsi Penerimaan 55

BAB 5: DIFFERENSIAL 61
A. Kuosien Diferensi dan Derivatif 61
B. Diferensial Dalam Penerapan Ekonomi 63
1. Elastisitas 63
2. Fungsi Pendapatan 65
3. Biaya 67
4. Marginal Utility 68
5. Produk Marjinal 69
6. Analisis Keuntungan Maksimum 70

BAB 6: INTEGRAL 72
A. Konsep Integral 72
1. Integral Tak Tentu 72
2. Intergral Tak Tentu dalam Ekonomi 73
a. Fungsi Biaya 73
b. Fungsi Penerimaan 75
3. Integral Tentu 76
4. Integral Tentu dalam Ekonomi 77
a. Surplus Konsumen 77
b. Surplus Produsen 80

BAB 7: MATRIKS 83
A. Konsep Matriks 83
B. Jenis – Jenis Matriks 84
1. Matriks Bujur Sangkar 84
2. Vektor 85
3. Matriks Identitas 86
4. Matriks Diagonal 86
5. Matriks Segitiga Atas 87
6. Matriks Segitiga Bawah 87

7. Matriks Nol 87
8. Matriks Baris 87
9. Matriks Transpose 88
10. Matriks Simetris 88
11. Matriks Singular dan Tan-Singular 88
12. Kesamaan Matriks 88

C. Operasi Matriks 89
1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks 89
2. Perkalian Skalar dengan Matriks 89
3. Perkalian Matriks dengan Matriks 91
4. Pemangkatan Matriks 93

D. Aplikasi Matriks dalam Bisnis dan Ekonomi 93

E. Determinan Matriks 95
1. Matriks Dalam Analisis Input-Output 95
a. Matriks Transaksi 95
b. Notasi Matriks Tabel Transaksi 97

DAFTAR TABEL

Tabel 1. Permintaan Jagung 34
Tabel 2. Penawaran Barang.. 36
Tabel 3. Titik Koordinat Kurva Parabolik.................................. 44
Tabel 4. Titik Koordinat Kurva Parabolik 2 45
Tabel 5. Titik Koordinat Fungsi Kubik....................................... 46
Tabel 6. Kaidah-kaidah differensial 62
Tabel 7. Kaidah-kaidah integral tak tentu 73
Tabel 8. Gross Domestic Product (GDP)..................................... 83
Tabel 9. Matriks Transaksi 95
Tabel 10. Notasi Matriks Tabel Transaksi.................................. 97
Tabel 11. Notasi Matriks Tabel Transaksi.................................. 98

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Operasi himpunan gabungan 2
Gambar 2. Operasi himpunan irisan..... 2
Gambar 3. Operasi himpunan disjoint..... 2
Gambar 4. Operasi himpunan selisih 3
Gambar 5. Operasi himpunan pelengkap $\bar{A}$ 3
Gambar 6. Operasi himpunan pelengkap $\bar{B}$ 3
Gambar 7. Skema sistem bilangan..... 5
Gambar 8. Grafik Kurva linier 24
Gambar 9. Kurva linier horizontal dan vertikal..... 24
Gambar 10. Peta Konsep hubungan linier 25
Gambar 11. Permbentukan kurva linier cara dwi koordinat . 26
Gambar 12. Hubungan berimpit dan sejajar dua kurva linier 27
Gambar 13. Hubungan sejajar dua kurva linier..... 28
Gambar 14. Hubungan tegak lurus dua kurva linier..... 28
Gambar 15. Kurva fungsi permintaan 33
Gambar 16. Kurva permintaan jagung 35
Gambar 17. Kurva penawaran barang 37
Gambar 18. Kurva keseimbangan pasar..... 38
Gambar 19. Kurva keseimbangan pasar cabai 39
Gambar 20. Kurva keseimbangan pasar setelah pajak..... 43
Gambar 21. Kurva fungsi non-linear parabolik sejajar sumbu vertikal..... 45
Gambar 22. Kurva fungsi non-linear parabolik sejajar sumbu horizontal 45
Gambar 23. Kurva fungsi non-linear kubik..... 46
Gambar 24. Kurva fungsi biaya 53
Gambar 25. Kurva fungsi biaya rata-rata..... 53

Gambar 26. Kurva fungsi biaya (kubik) 55
Gambar 27. Kurva fungsi biaya rata-rata (kubik) 55
Gambar 28. Kurva penerimaan total 57
Gambar 29. Kurva penerimaan maksimum 60
Gambar 30. Kurva surplus konsumen 77
Gambar 31. Kurva surplus konsumen permintaan jeruk. 79
Gambar 32. Kurva surplus produsen. 80
Gambar 33. Kurva surplus produsen penawaran tempe. 82

BAB 1

HIMPUNAN DAN SISTEM BILANGAN

A. Konsep Himpunan

Himpunan merupakan kumpulan atau gugusan dari sejumlah objek yang disebut sebagai anggota. Anggota dalam sebuah himpunan biasanya memiliki karakteristik, unsur, atau sifat yang sama. Anggota-anggota yang dapat dikategorikan dalam sebuah himpunan misalnya kumpulan pelaku usaha mikro, himpunan produk minuman halal, himpunan mahasiswa manajemen bisnis, dan himpunan produk olahan *seafood.* Himpunan dapat diartikan juga sebagai sebuah kumpulan atau kelompok dalam suatu objek maupun unsur yang dirumuskan dengan tegas dan dapat dibeda-bedakan (Assauri, 2013).

Himpunan dengan anggota memiliki perbedaan yaitu, dalam himpunan umumnya menggunakan huruf besar/kapital (A, B, C, D, X, Y,...). Sedangkan, anggota himpunan umumnya menggunakan huruf kecil (a, b, c, d, x, y,...). Tanda yang digunakan dalam suatu himpunan biasanya menggunakan tanda duakurung kurawal "{}".

A = $\{p,\ q,\ r\}$

B = $\{p,\ q,\ r, s\}$

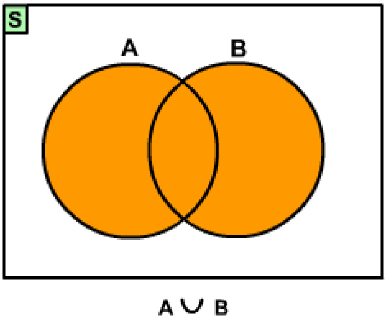
$p \in A$: *Objek p adalah anggota himpunan A*

1. Operasi Himpunan

Menyajikan sebuah himpunan perlu mengenal beberapa notasi agar lebih mudah memahami maksud dari symbol yang disajikan.

1. Operasi Gabungan

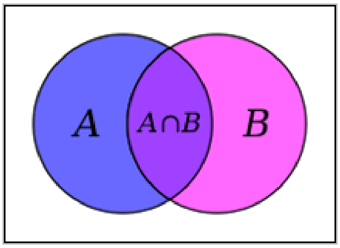
$A \cup B = \{x; x \in A \ \ atau \ \ x \in B\}$



Gambar 1. Operasi himpunan gabungan

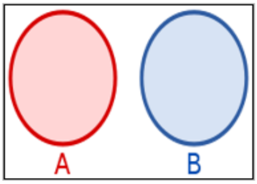
2. Operasi Irisan (intersection)

$A \cap B = \{x; x \in A \, atau \, x \in B\}$



$A \cap B$

Gambar 2. Operasi himpunan irisan

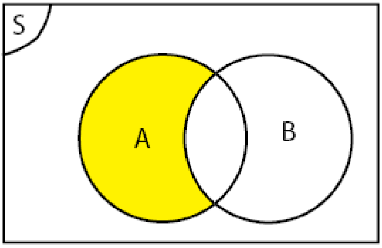


$A \cap B = \emptyset \ (DISJOINT)$

Gambar 3. Operasi himpunan disjoint

3. Operasi Selisih

$A - B \equiv A|B = \{x; x \in A \; tetapi \; x \in B\}$

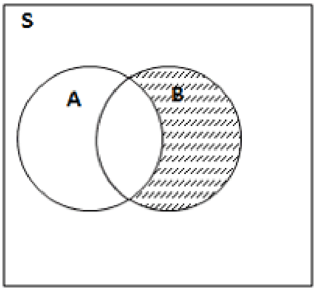


Gambar 4. Operasi himpunan selisih

4. Operasi Pelengkap

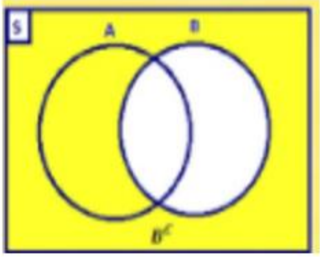
Ā = { x; x ∈U tetapi x ∅A} = U - A

$\bar{A}$



Gambar 5. Operasi himpunan pelengkap Ā

$\bar{B}$



Gambar 6. Operasi himpunan pelengkap $\bar{B}$

5. Ingkaran
   $p \in A$ menjadi $p \notin A$
   $A \subset B$ menjadi $A \not\subset B$
   $A = B$ menjadi $A \neq B$

2. Penyajian himpunan

1. Daftar

Mencantumkan seluruh objek anggota

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

2. Kaidah

Menyebutkan karakteristik objek

$A = \{x; 0 < x < 6\}$

3. Himpunan Universal dan Himpunan Kosong

Himpunan universal/himpunan semesta bersimbol U. Himpunan kosong (tidak memiliki anggota) bersimbol { }atau ∅. Himpunan universal merupakan induk dari semua himpunan, dan himpunan kosong merupakan himpunan bagian seluruh himpunan. Oleh karena itu, apabila terdapat himpunan A, maka dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\boxed{\emptyset \subset A \subset U}$$

Contoh:

$U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$B = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

$C = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

Berdasakan beberapa contoh himpunan di atas, dapat dibuat kesimpulan sebagai berikut.

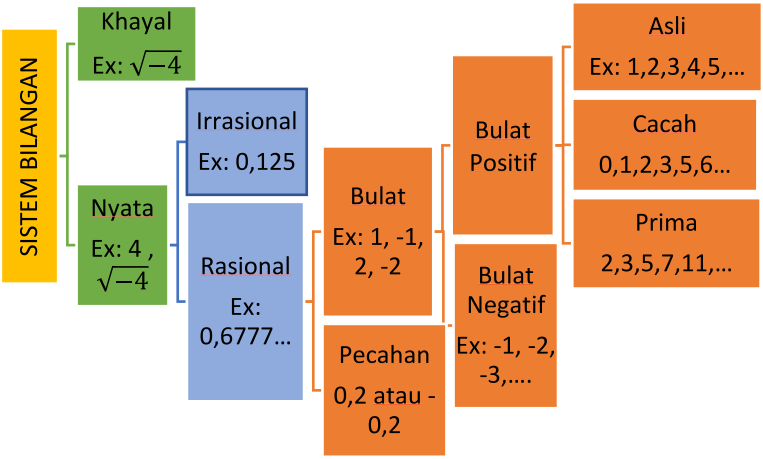
$$x \in U\ dimana\ 0 \leq x \leq 9$$

$$y \in A\ dimana\ 0 \leq y \leq 4$$

$z \in B \ dimana \ 5 \leq z \leq 9$
$y \in C \ dimana \ 0 \leq y \leq 4$
$A \subset A \quad B \subset U \ \ dan \quad C \subset U$
$A = C \quad A \neq B \quad dan \quad B \neq C$
$y \in A \ dan \ juga \ y \in C, \ maka \ A \subset C \ dan \ C \subset A$
$y \notin B \ dan \ dilain \ pihak \ z \in A \ serta \ z \notin C$
$\emptyset \subset A \quad \emptyset \subset B \quad \emptyset \subset C \quad \emptyset \subset U$
$\emptyset \subset A \subset U \quad \emptyset \subset B \subset U \quad \emptyset \subset C \subset U$

B. Sistem Bilangan

Bilangan-bilangan dapat digabungkan menjadi bilangan nyata dan bilangan khayal. Bilangan nyata dibagi menjadi bilangan irrasional dan bilangan rasional (bilangan bulat dan bilangan pecahan). Bilangan nyata dapat positif maupun negatif. Bilangan khayal adalah bilangan yang berupa akar pangkat genap dari suatu bilangan negatif.



Gambar 7. Skema sistem bilangan
Sumber: olah

1. **Operasi Bilangan**

   Operasi bilangan nyata memiliki kaidah-kaidah tertentu saat mereka diberi perlakuan penjumlahan dan perkalian. Berikut ini kaidah-kaidah operasi penjumlahan dan perkalian bilangan nyata.

   a. Kaidah Komukatif

      $a+b = b+a$, contoh $4+6 = 6+4$

      $a \times b = b \times a$, contoh $2x3 = 3x2$

   b. Kaidah Asosiatif

      $(a+b) + c = a + (b+c)$

      $(a \times b) \ x \ c = a \times (b \times c)$

   c. Kaidah Pembatalan

      Jika $a+c = b+c$

      Maka $a = b$

      Jika $a.c = b.c \quad (c \neq 0)$

      Maka $a = b$

   d. Kaidah Distributif

      $a\ (b+c) = a.b + a.c$

   e. Unsur Penyama

      $a \pm 0 = a$

      $a \ x \ 1 = a$

      $a : 1 = a$

   f. Kebalikan

      $a+(-a)=0$

2. **Operasi Tanda**

   a. Operasi Penjumlahan

      $(+ a) + (+ b) = (+ c)$

      $(- a) + (- b) = (-c)$

(+a) + (− b) = (+ c) jika a > b

(+a) + (− b) = (− d) jika a < b

(− a) + (+ b) = (+ c) jika a < b

(− a) + (+ b) = (− d) jika a > b

b. Operasi Pengurangan

(+ a) − (+ b) = (+ c) jika a > b

(+ a) − (+ b) = (− d) jika a < b

(− a) − (− b) = (+ c) jika a < b

(− a) − (− b) = (− d) jika a > b

(+ a) − (+b) = (+ c)

(− a) − (+ b) = (− c)

c. Operasi Perkalian

(+ a) × (+ b) = (+ c)

(− a) × (− b) = (+ c)

(+ a) × (− b) = (− c)

(−a) × (+ b) = (− c)

d. Operasi Pembagian

(+ a) : (+b) = (+c)

(−a) : (−b) = (+c)

(+a) : (−b) = (−c)

(−a) : (+b) = (−c)

3. **Operasi Bilangan Pecahan**

a. Operasi Pemadanan

$$\frac{a}{b} = \frac{axc}{bxc}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$$

b. operasi penjumlahan dan pengurangan

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ac}{cd} + \frac{bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ac}{cd} - \frac{bc}{cd}$$

c. Operasi Perkalian

$$\frac{a}{c} x \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

d. Operasi Pembagian

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} x \frac{d}{b}$$

DERET HITUNG DAN DERET UKUR

A. Pengertian Deret

Deret ialah rangkaian bilangan yang tersusun secara sistematis dan memenuhi kaidah- kaidah tertentu. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk sebuah deret dinamakan suku. Dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya, deret dapat dibedakan menjadi 3 (tiga), yaitu: Deret Hitung, Deret Ukur, dan Deret Harmoni.

B. Deret Hitung

Deret hitung mempunyai pola perubahan dari suatu suku e suku berikutnya (selisih atau beda) sebesar bilangan yang nilainya tetap (Sunyoto dan Sarnowo, 2013: 23). Deret Hitung merupakan deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan pen- jumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku dari deret hitung ini dinamakan pembeda yaitu seleisih antara nila-nilai dua suku yang berurutan.

Contoh:

4, 9, 14, 19, 24, 29	(pembeda= 5)
92, 82, 72,62,52	(pembeda= -10)
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	(pembeda= 2)

1. Suku ke-n

Suku ke-n ($\boldsymbol{S_n}$) yaitu besarnya nilai suku tertentu (ke-n) dari sebuah deret hitung.

1, 4, 7, 10, 13,….n

$\boldsymbol{S_1}$ $\boldsymbol{S_2}$ $\boldsymbol{S_3}$ $\boldsymbol{S_4}$……………… $\boldsymbol{S_n}$

$$S_n = \alpha + (n-1)b$$

Keterangan:

S_n : suku ke "n"

a : suku pertama

b : pembeda

n : indeks suku

2. Jumlah "n" suku Deret Hitung

Jumlah n suku ($\boldsymbol{U_n}$) jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu

$$\boldsymbol{J_4 = \sum_{i=4}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_{3+}S_4}$$

$$\boldsymbol{J_5 = \sum_{i=5}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_{3+}S_4 + S_5}$$

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots S_n}$$

Jadi rumus jumlah suku ke "n" deret hitung yaitu**:**

$$\boldsymbol{J_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)b\}}$$

Keterangan:

J_n : Jumlah suku ke "n:

a : suku pertama

b : pembeda

n : indeks suku

<u>**Contoh Soal**</u>

Nilai suku ke-10 (s_{10}) dari deret hitung 7, 12, 17, 22, 27, 32 adalah:

$$S_n = \alpha + (n-1)b$$

- s_{10} = a + (n - 1)b
- s_{10} = 7 + (10 - 1)5
- s_{10} = 7 + 45
- s_{10} = 52.

<u>Contoh Soal</u>

Jumlah deret hitung 7, 12, 17, 22, 27, 32 sampai suku ke-10 adalah:

$$\boldsymbol{J_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}}$$

- J_{10} = 10/2 (7 + S10)
- J_{10} = 5 (7 + 52)
- J_{10} = 295

C. Deret Ukur

Deret Ukur merupakan deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan perkalian terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku sebuah deret ukur dinamakan pengganda, yakni merupakan hasil bagi nilai suatu suku terhadap nilai suku didepannya. Deret ukur memiliki unsur penting yang perlu perhitungkan sebagai alat bantu analisa yaitu besarnya nilai pada suatu suku (***suku ke-n dari DU)*** dan jumlah nilai deret (***jumlah suku ke-n***).

Contoh:

5, 10, 20, 40, 80,160	(pengganda = 2)
512, 256, 128, 64, 32, 16	(pengganda = 0,5)
2, 8, 32, 128, 512	(pengganda = 4)

1. Suku ke-n Deret Ukur

Suku ke-n ($\boldsymbol{S_n}$) yaitu besarnya nilai suku tertentu (ke-n) dari sebuah deret ukur

3, 6, 12, 24, 48

$\boldsymbol{S_1\ S_2\ S_3\ S_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ S_n}$

$\boldsymbol{S_1 = 3 = \mathrm{a}}$

$\boldsymbol{S_2 = 6 = \mathrm{ap}}$ $\qquad = \boldsymbol{ap^{2-1}}$

$\boldsymbol{S_3 = 12 = \mathrm{app} = ap^2}$ $\qquad = \boldsymbol{ap^{3-1}}$

$\boldsymbol{S_4 = 24 = \mathrm{appp} = ap^3}$ $\qquad = \boldsymbol{ap^{4-1}}$

$$S_n = ap^{n-1}$$

Keterangan:

S_n : suku ke "n" deret ukur

a : suku pertama

p : pengganda

n : indeks suku

2. Deret Ukur – Jumlah n Suku

Jumlah n suku (J_n) jumlah sebuah deret ukur sampai dengan suku tertentu

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots S_n}$$

Sesuai dengan $S_n = ap^{n-1}$ maka masing-masing S_i dijabarkan menjadi:

$\boldsymbol{J_n = a + ap + ap^2 + ap^3 + \cdots + ap^{n-1}}$ ....persamaan 1

Jika persamaan 1 dikalikan pengganda (p) maka:

$$\boldsymbol{pJ_n = ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + \cdots + ap^{n-1} + ap^n}$$

Jadi rumus jumlah n suku pada deret ukur menjadi:

$$\boxed{J_n = \frac{a(p^n - 1)}{p - 1}}$$

Contoh

Jumlah suku ke 10 dari deret ukur

3, 6, 12, 24, 48.....n yaitu?

$$J_n = \frac{a(p^n - 1)}{p - 1}$$

$$J_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$J_{10} = \frac{3(1024 - 1)}{1}$$

$$J_{10} = \frac{3(1023)}{1} = 3069$$

D. Penerapan Deret dalam Ekonomi

1. Model Perkembangan Usaha

Kegiatan analisis ekonomi pada variabel-variabel kegiatan usaha dapat dihitung dengan menggunakan pola deret hitung jika memiliki pola seperti deret yaitu konstan dari waktu ke waktu. Variabel – variabel ekonomi yang dapat dianalisis menggunakan pola deret hitung seperti produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja atau penanaman modal.

Studi kasus

Sebuah perakitan sepeda motor yang mulai berproduksi pada bulan 1990 berusaha untuk dapat menambah produksi pada setiap bulannya. Pada bulan januari 1991 pabrik tersebut memproduksi 3.500 unit, sedangkan pertambahan produksi setiap bulannya sebesar 3.000 unit. Dengan mengikuti deret hitung,

a. Hitunglah jumlah sepeda motor yang diproduksi pada bulan Januari 2000!
b. Hitunglah jumlah sepeda motor yang diproduksi dari bulan Januari sampai bulan Desember 2000!

Pembahasan

Diketahui :

Produksi awal = a = S_1 = 3.500

Pertambahan produksti per bulan = b = 3.000

Tahun 2000 adalah *n* ke 20 sejak tahun 1991

$$S_n = a + (n - 1)b$$

a. Jumlah sepeda motor yang diproduksi bulan Januari 2000 sejak 1991 diartikan sebagai suku ke-109 ($S_n = S_{109}$)

$$\boldsymbol{S_n = a + (n - 1)b}$$

$$S_{109} = 3.500 + (109 - 1)3.000 = 3.500 + 108(3.000)$$
$$= 3.500 + 324.000 = 327.500$$

b. Jumlah produksi mobil sejak Januari 1991 – Desember 2000 diartikan sebagai jumlah suku ke-120 ($J_n = J_{120}$)

$$\boldsymbol{J_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)}$$

$J_{120} = \frac{120}{2}(2x3.500 + (120 - 1)3.000) \quad = 60(7.000 + 357.000) = 60(364.000) = 21.840.000$

2. Model Pertumbuhan Penduduk

Deret ukur menggukan pola perkalian. Bentuk penerapan deret ukur paling familiar Malthus (1798): “Produksi pangan mengiuti deret hitung dan penduduk dunia tumbuh mengikuti deret ukur”.

$$\boxed{P_t = P_1 R^{t-1}}$$

Dimana:

$R = 1 + r$

P_1*: jumlah pada tahun pertama (basis)*

P_t*: jumlah pada tahun ke-t*

r : persentase pertumbuhan per tahun

t : indeks waktu (tahun)

Studi Kasus

Penduduk kota "Cakrawala" berjumlah 2 juta jiwa pada tahun 2000, dengan tingkat pertumbuhan penduduk sebesar 5% per tahun. Berapa jumlah penduduk ditahun 2015. Apabila mulai tahun 2015 pertumbuhannya menurun 2,5%, berapa jumlah penduduk 10 tahun kemudian?

Pembahasan

Diketahui:

$P_1 = 2\ juta$

$r \ = 0{,}05$

$R \ = 1 + r = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

t = 16

Ditanya: P_{16}?

$P_i = \ P_1 R^{t-1}$

$P_{16} = 2\ juta(1{,}05)^{16-1}$

$P_{16} = 2\ juta(1{,}05)^{15}$

$P_{16} = 2\ juta\ (2{,}078928)$

$P_{16} = 4.157.856\ jiwa$

Jadi jumlah penduduk ditahun 2015 yaitu 4.157.856 $jiwa$.

Apabila mulai tahun 2015 pertumbuhannya menurun 2,5%, berapa jumlah penduduk 10 tahun kemudian?

Diketahui:

$$P_1 = 4.157.856$$
$$r \ = 0{,}025$$
$$R \ = 1 + r = 1 + 0{,}025 = 1{,}025$$

Ditanya: P_{10}?

$$P_i = P_1 R^{t-1}$$
$$P_{10} = 4.157.856\ (1{,}025)^{10-1}$$
$$P_{10} = 4.157.856\ (1{,}025)^{9}$$
$$P_{10} = 4.157.856\ (1{,}248863)$$
$$P_{10} = 5.192.592\ jiwa$$

Jadi apabila mulai tahun 2015 pertumbuhannya menurun 2,5%, makan jumlah penduduk 10 tahun kemudian yaitu 5.192.592 $jiwa$.

3. Menghitung nilai sekarang dan yang akan datang (Anuitas)

Anuitas merupakan suatu rangkaian pembayaran atau penerimaan sejumlah uang yang sama besarnya dengan periode waktu yang sama untuk setiap transaksi. Anuitas sering diterapkan dalam aktivitas bisnis yang menerapkan konsep bunga. Bunga dalam teori bisnis merupakan suatu balas jasa yang dibayarkan bilamana kita menggunakan uang (Batafor, 2018: 73), contohnya sebagai berikut:

a. Pembelian rumah secara kredit
b. Bunga pinjaman
c. Bunga tabungan
d. Bunga deposito
e. Bunga obligasi
f. Angsuran kredit

Anuitas dibagi dua yaitu anuitas biasa (*ordinary annuity*) dan anuitas dimuka (*annuity due*). Anuitas biasa (*ordinary annuity*) digunakan jika pembayaran dilakukan pada setiap akhir periode. Perhitungan anuitas biasa dibedakan menjadi dua, yaitu nilai sekarang (*present value*) dan nilai yang akan datang (*future value*).

a. **Anuitas biasa**: nilai sekarang (*present value)*

Present Value (*PV*) adalah nilai saat ini dari jumlah uang atau arus kas (cash flow) yang terperinci dengan tingkat pengembalian tertentu. Perhitungan PV biasa digunakan untuk perhitungan angsuran kredit dan saldo pinjaman.

$$PV = \frac{(1-(1+i)^{-n}}{i}(A)$$

Keterangan:

PV : *present value*/nilai sekarang

i : *interest rate/*tingkat suku

n :banyak periode (tahun, semester, triwulan, bulan)

A : *annuity/*pembayaran per periode

Studi Kasus

Tn. Magister meminjam uang ke bank sebesar Rp 40.000.000. Suku bunga pinjaman 18% p.a. Berapakah besar angsuran pinjaman yang harus dibayar setiap bulan jika pinjaman tersebut harus dilunasi selama 36 bulan?

Pembahasan

Diketahui :

PV = Rp 40.000.000,-

i = 18% p.a=$\frac{18\%}{12}$=1,5% per bulan

Ditanya : A?

$$PV = \frac{(1-(1+i)^{-n}}{i}(A)$$

40.000.000= $\frac{(1-(1+0{,}015)^{-36}}{0{,}015}(A)$

40.000.000= $\frac{(1-0{,}5851)}{0{,}015}(A)$

40.000.000= $\frac{0{,}4149}{0{,}015}(A)$

$$A = 40.000.000\ x\ \frac{0{,}015}{0{,}4149} = 1.446.131{,}589/\text{bulan}$$

Jadi angsuran pinjaman per bulan yang harus dibayar selama 36 bulan yaitu Rp 1.446.131,-.

b. Anuitas yang akan datang (*future value*)

Future Value (FV) adalah nilai investasi yang dilakukan pada saat ini yang akan tumbuh seiring dengan berjalannya waktu. Perhitungan FV biasa digunakan untuk menentukan nilai saldo tabungan saat ini, lama menabung, besar tabungan.

$$FV = \frac{((1+i)^n - 1)}{i}(A)$$

Dimana FV = *future value* (nilai yang akan datang) dan untuk $\frac{((1+i)^n - 1)}{i}$, disebut factor anuitas nilai akan dating disimbolkan Sn,i.

Studi Kasus

Tentukan anuitas nilai yang akan datang (FV) jika setiap bulan menabung sebesar Rp 200.000,- selama setahun dengan tingkat suku bunga tabungan 12% p.a.

Diketahui :

A=Rp 200.000,-

n = 12 bulan

i = 12% p.a

=1% per bulan

= 0,01

FV=.....?????

$$FV = \frac{((1+i)^n - 1)}{i}(A)$$

$$FV = \frac{((1+0{,}01)^{12} - 1)}{0{,}01}(200.000)$$

$$FV = \frac{0{,}1268250}{0{,}01}(200.000)$$

$$\text{FV} = 12{,}68250 \text{ x } (200.000)$$

Jadi besar biaya selama setahun:

$$= 2.536.500 - (200.000\,x\,12)$$
$$= 2.536.500$$
$$- 2.400.000$$
$$= 136.500, -$$

Tanpa anuitas

200.000x12=2.400.000

c. Anuitas dimuka

Perbedaan pembayaran transaksi dengan anuitas biasa dan anuitas di muka yaitu:

1) anuitas biasa pembayaran dilakukan pada akhir periode, misal bulan, berarti pembayaran di akhir bulan, tepat habis tempo jangka waktu pembayaran.
2) Anuitas dimuka *(annuity due)* pembayaran dilakukan diawal bulan, sehingga akan lebih cepat satu bulan

Terdapat dua perhitungan anuitas dimuka yaitu anuitas dimuka nilai sekarang (*present value*) dan anuitas dimuka yang akan datang (*future value*).

1) Anuitas Dimuka Nilai Sekarang

Rumus menghitung anuitas dimuka *present value* yaitu:

$$PVdue = \left(\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}+1\right)(A)$$

Kasus

Berapakah nilai sekarang (*present value)* dari uang sebesar Rp 300.000 yang akan diterima per bulan sebanyak 10 kali, mulai hari ini dengan tingkat suku bunga 12% p.a ?

Diketahui:

A=Rp 300.000,-
i=12% p.a=1%/bulan=0,01
n=10 bulan

Pembahasan

PVdue =..???

$$PVdue = \left(\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\right)(A)$$

$$PVdue = \left(\frac{1-(1+0{,}01)^{-(10-1)}}{0{,}01} + 1\right)(300.000)$$

$$PVdue = \left(\frac{1-(1{,}01)^{-9}}{0{,}01} + 1\right)(300.000)$$

$$PVdue = \left(\frac{0{,}08566}{0{,}01} + 1\right)(300.000)$$

$$PVdue = (8{,}566 + 1)(300.000) = 2.869.800$$

2) **Anuitas dimuka: nilai yang akan datang (*future value)***

Anuitas dimuka nilai yang akan datang (*future value)* dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut.

$$FV = \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)(A)$$

Pembayaran transaksi pada anuitas dimuka dilakukan pada awal periode, sehingga perbedaan dengan anuitas biasa terletak pada suku bunga dan waktu pelunasan lebih cepat satu periode. Dengan, demikian kita dapat persamaan anuitas dimuka untuk nilai yang akan dating dengan menghasilkan factor bunga pada periode terakhir (1+i).

$$FVdue = \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)(A)(1+i)$$

Kasus

Berapakah total tabungan saya di sebuah bank jika setiap awal bulan menabung sebesar Rp 150.000,- selama dua tahun berturut-turut dengan tingkat suku bunga bank yang berlaku diasumsikan flat sebesar 8% p.a ?

Pembahasan

Diketahui:

A=Rp 150.000,-
n=2 tahun=24 bulan
i=8%/tahun=0,67%/bulan

FVdue=*...???*

$$FVdue = \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)(A)(1+i)$$

$$FVdue = \left(\frac{(1+0{,}0067)^{24} - 1}{0{,}0067}\right)(150.000)(1+0{,}0067)$$

$$FVdue = (25{,}94334)(150.000)(1{,}0067)$$

$$FVdue = 3.917.574{,}057$$

BAB 3

FUNGSI LINIER

A. Fungsi

Fungsi adalah hubungan matematis dimana nilai variabel terikat ditentukan oleh nilai satu atau lebih variabel bebas. Fungsi memiliki unsur-unsur pembentuk fungsi yang terdiri dari dari:

1. Variabel, yaitu bagian dari unsur pembentuk fungsi yang menggambarkan faktor-faktor tertentu. Variabel biasa dilanmbangkan dengan huruf latin. Variabel terdiri dari variabel bebas (*independent variable*) dan variabel terikat (*dependent variable*). Variabel bebas merupakan variabel yang berdiri sendiri dan nilainya tanpa bergantung pada variabel yang lain. Sedangkan variabel terikat yaitu variabel yang keberadaannya bergantung pada variabel yang lain.
2. Koefisien dan konstanta. Koefisien merupakan angka yang melekat di depan variabel dalam sebuah fungsi. Konstanta merupakan bilangan yang mengikuti sebuah fungsi dan biasanya berdiri sendiri tanpa terikat dengan variabel yang lain.

$$y = f(x)$$

$$y = 2{,}5x + 8$$

Fungsi $y = f(x)$ merupakan notasi fungsi secara umum. Huruf y mencerminkan variabel terikat (*dependent variable*), yang mana nilainya bergantung dari variabel bebas (*independent variable*) yang dalam fungsi bersimbol huruf *x.* Angka 2,5 dalam fungsi tersebut menggambarkan nilai koefisien variabel *x.* Konstanta dalam fungsi tersebut ditunjukkan oleh angka 8.

B. Jenis – Jenis Fungsi

Fungsi dengan satu variabel bebas disebut fungsi Univariat Sederhana. Ada korespondensi satu-satu. Fungsi, dengan lebih dari satu variabel independen, disebut fungsi Multivariat. Variabel bebas sering dilambangkan dengan X. Variabel terikat sering dilambangkan dengan Y. Misalnya, Y adalah fungsi dari X yang berarti Y bergantung pada X atau nilai Y ditentukan oleh nilai X. Secara matematis dapat ditulis Y = f(X).

1. Fungsi linier

Fungsi linear adalah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat satu (fungsi berderajat satu). Fungsi linier sering disebut sebagai *pgl* atau persamaan garis lurus. Terdapat dua istilah yang muncul dalam fungsi linier yaitu penggal dan lereng.

2. Lereng dan Penggal

Berikut ini merupakan bentuk umum fungsi linier beserta unsurnya yaitu penggal dan lereng.

$$\boxed{y = a + bx}$$

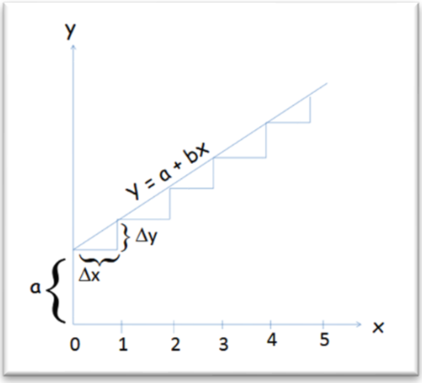
a = penggal garis pada sumbuvertikal y

b = koefisien arah atau lereng garis yang bersangkutan atau gradien/slope.

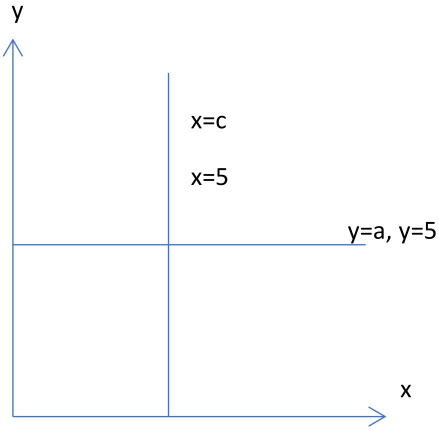
Lereng disebut juga *slope* maupun gradient (*b)*mencerminkan besarnya tambahan nilai y untuk setiap tambahan satu unit x, juga mencerminkan tangen dari sudut yang dibentuk oleh garis y dan sumbu x (Jacques, 2006: 33).

Apabila b > 0 : garis condong ke kanan
b < 0 : garis condong ke kiri
b = 0 : garis mendatar (sejajar sumbu x)
b = ~ : garis tegak (tegak lurus dengan sumbu x)
contoh grafik fungsi linier :

a = penggal, nilai y saat x-0
b = lereng: b=$\frac{\Delta y}{\Delta x}$



Gambar 8. Grafik Kurva linier



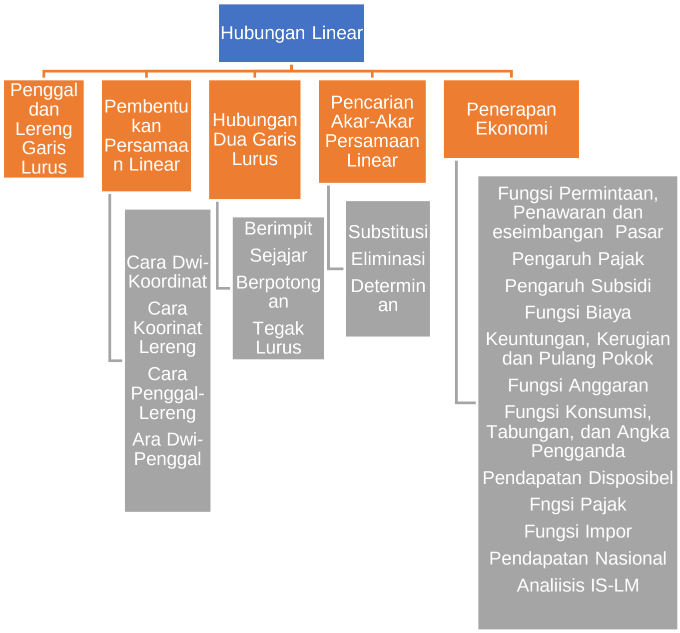
Gambar 9. Kurva linier horizontal dan vertikal

> Y=a, seberapapun nilai x tidak berpengaruh terhadap y
> x=c, seberapapun nilai y tidak berpengaruh terhadap nilai x

Koefisien arah atau lereng garis dapat ditentukan dengan rumus di bawah ini.

$$\boxed{\text{Kemiringan} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ atau } \frac{Y2-}{Y1}}$$

Kemiringan dari fungsi linier adalah sama dengan perubahan variabel terikat *y* dibagi dengan perubahan dalam variabel bebas *x*. Kemiringan juga disebut dengan gradien dan dilambangkan dengan huruf *m*.



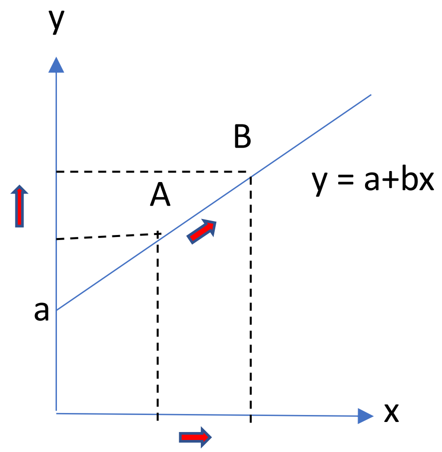
Gambar 10. Peta Konsep hubungan linier

3. Pembentukan Persamaan Linier

a. Cara Dwi-Koordinat

Metode dwi-koordinat diterapkan dari dua buah titik untuk membentuk sebuah persamaan linier. Contoh penerapan tersebut misalnya diketahui dua buah titik A dan B dengan koordinat masing-masing (x1,y1) dan titik (x2,y2), maka dapat dibentuk sebuah persamaan linier yang memenuhi kedua titik tersebut. Jika diketahui dua titik koordinat $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, maka untuk menentukan persamaan linier dapat menggunakan rumus di bawah ini.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$



Gambar 11. Permbentukan kurva linier cara dwi koordinat

b. Cara Koordinat-Lereng

Cara koordinat-lereng dapat diterapkan untuk membentuk persamaan linier apabila diketahui sebuah titik dan satu lereng. Jika diketahui titik A(x_1, y_1) dan lereng (b), maka persamaan linier dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$y - y_i = b(x - x_1)$$

c. **Cara Penggal-Lereng**

Persamaan linier dapat dibentuk dari penggal dari salah satu sumbu dan lereng garis yang memenuhi persamaan. Rumus untuk menentukan persamaan linier dengan cara penggal lereng yaitu:

$$\boxed{y = a + bx}$$

a = penggal , b = lereng

Apabila diketahui , penggal dan lereng garis y = f(x) masing masing 5 dan 3,75 , maka dapat dibentuk sebuah persamaan linier sebagai berikut.

$$y = 5 + 3{,}75x$$

d. **Cara Dwi-Penggal**

Terbentuk persamaan linier apabila diketahui penggal garis pada masing- masing sumbu, yakni penggal yang terdapat pada sumbu vertikal (ketika x = 0) dan penggal pada sumbu horizontal (ketika y = 0).

$$\boldsymbol{y = a - \frac{a}{c}x}$$

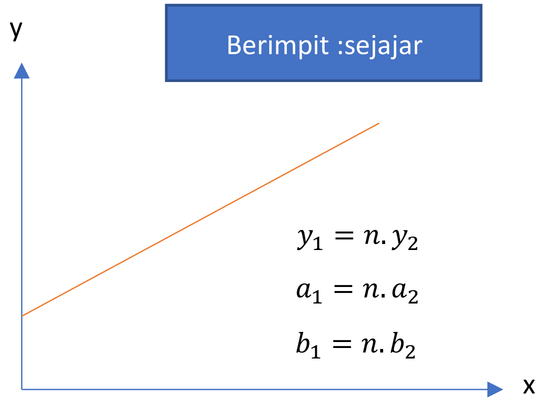
Penggal, $c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

a :penggal vertical

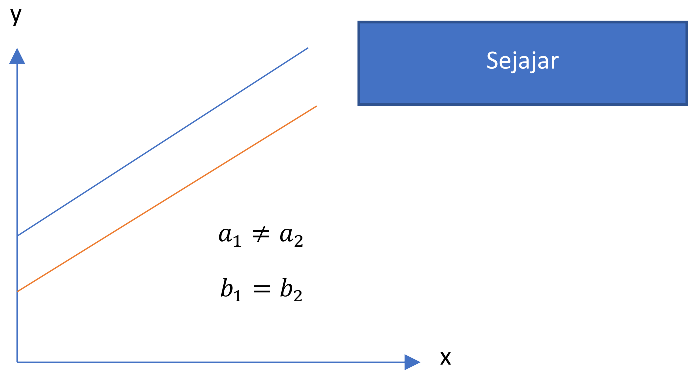
c :penggal horizontal

4. Hubungan Dua Garis Lurus

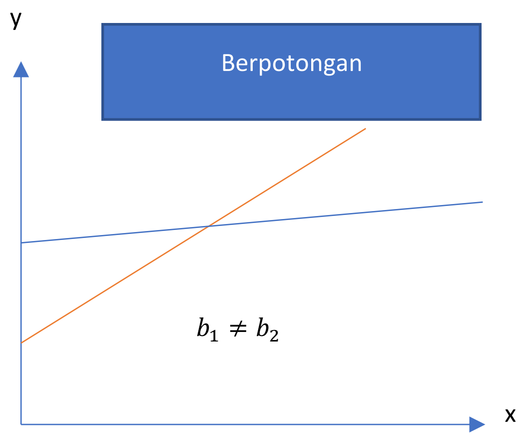
Dua buah garis lurus yang terhubung dalam sistem sepasang sumbu silang mempunyai empat macam kemungkinan bentuk hubungan yaitu berimpit, sejajar, berpotongan, dantegak lurus.

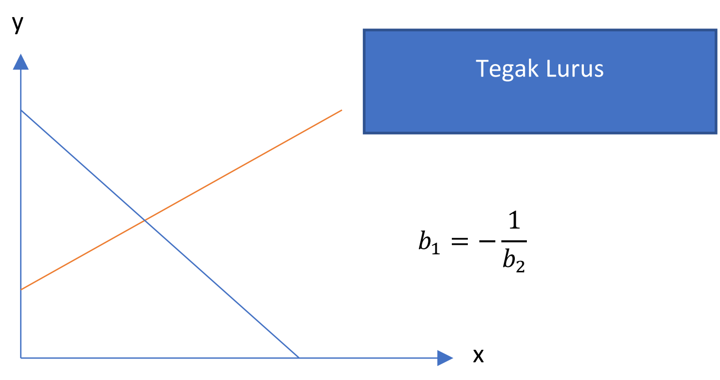


Gambar 12. Hubungan berimpit dan sejajar dua kurva linier



Gambar 13. Hubungan sejajar dua kurva linier





Gambar 14. Hubungan tegak lurus dua kurva linier

5. Pencarian Akar-Akar Persamaan Linear

Pencarian akar – akar persamaan linier merupakan langkah untuk menentukan nilai masing – masing variabel dalam persamaan yang dicari. Angka yang akan dicari dari masing – masing variabel tidak diketahui sebelumnya. Apabila variabel dalam persamaan tersebut adalah variabel *x* dan *y,* maka yang akan dicari adalah nilai *x* dan *y.* Penentuan akar – akar persamaan-persamaan linier secara serempak (*simultaneously*) dapat dilakukan menggunakan beberapa cara yaitu dengan cara subtitusi, cara eliminasi, maupun cara determinan.

a. Substitusi

Apabila terdapa dua persamaan dengan dua variabel dapat diselesaikan dengan menyelesaikan terlebih dahulu persamaan pertama, kemudian mensubtitusikannya kedalam persamaan kedua.

Contoh:

Carilah nilai variabel-variabel x dan y dari dua persamaan berikut:

$2x + y = 6$ dan $x - y = -3$

Pembahasan :

$2x + y = 6$ ⍰ $y = 6 - 2x$ (1)

$x - y = -3$ (2)

Subsitusikan persamaan (1) ke (2),

$x - y = -3$

$x - (6 - 2x) = -3$

$x - 6 + 2x = -3$ $3x-6 =-3$

$3x = -3 + 6$

$3x = 3$

$x = 1$

Subsitusikan x = 1 ke persamaan (1), maka:

$y = 6 - 2x$

$y = 6 - 2(1)$

$y = 6 - 2$

$y = 4$

Jadi, Himpunan penyelesaiannya : {(1, 4)}

b. **Eliminasi**

Apabila terdapat dua persamaan dengan dua variabel, maka dapat diselesaikan dengan metode menghilangkan untuk sementara (eliminasi) salah satu dari nilai bilangan variabel yang ada, sehingga dapat dihitung nilai dari bilangan variabel yang lain.

Contoh:

carilah nilai variabel-variabel x dan y dari dua persamaan berikut $2x + y = 6$ dan $x - y = -3$

Pembahasan :

Mencari nilai x dengan mengeliminasi y :

$2x + y = 6$

$x - y = -3$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} +$$

$3x = 3$

$x = 1$

Mencari nilai y dengan mengeliminasi x :

$2x + y = 6 \quad |x\ 1|\ 2x + y = 6$

$x - y = -3 \quad |x\ 2|\ 2x - 2y = -6$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} -$$

$3y = 12$

$y = 4$

Jadi Himpunan penyelesaian : {(1,4)}.

c. **Determinan**

Sistem persamaan linear yang memiliki dua dan tiga variabel dapat dengan mudah diselesaikan menggunakan determinan. Di sini, rumus dan langkah-langkah untuk menemukan solusi dari sistem persamaan linier diberikan bersama dengan masalah praktik. Aturan Cramer dijelaskan dengan baik bersama dengan diagram.

Determinan derajat dua

$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$=ae-db

Determinan derajat tiga

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$=(aei+bfg+cdh)- (gec+dbi+ahf)

dx + ey = f

Contoh

ax + by = c

dx + ey = f

$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \\ f \end{vmatrix}$ D=$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db$

Dx = $\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb \qquad x = \frac{Dx}{D} = \frac{ce-fb}{ae-db}$

Dy = $\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - dc \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{af-dc}{ae-db}$

Contoh penyelesaian untuk 3 persamaan

x + 2y – z = 0

2x + 5y + 2z = 14

y – 3z = -7

Pembahasan

Penyelesaian untuk x dan y dapat dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 14 \\ -7 \end{vmatrix}$$

C. Penerapan Fungsi Linier dalam Ekonomi

1. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan adalah suatu persamaan yang menunjukkan hubungan antara variabel harga dan variabel jumlah (barang/jasa) yang diminta. Permintaan timbul saat konsumen menginginkan barang dan/atau jasa sesuai daya beli (Rosyidi: 2012). Perilaku konsumen dan harga, dapat dianalisa dengan kajian matematis menggunakan fungsi permintaan. Fungsi permintaan ini menggunakan sudut pandang pembeli/konsumen.

Faktor-faktor yang memengaruhi permintaan barang dan/atau jasa sebagai berikut (Rasul: 2013).

a. Harga barang itu sendiri. Semakin murah harga suatu barang, permintaan terhadap barang tersebut akan bertambah.
b. Harga barang lain yang berkaitan. Harga barang lain dapat berpengaruh jika hubungan antarbarang bersifat substitusi (saling menggantikan) atau bersifat komplementer (saling melengkapi).
c. Tingkat pendapatan per kapita. Semakin tinggi pendapatan, semakin tinggi daya beli konsumen. Permintaan terhadap barang atau jasa akan meningkat.
d. Selera. Selera, kebiasaan, dan pola hidup masyarakat termasuk faktor yang menentukan tinggi rendahnya permintaan atas barang atau jasa tertentu.
e. Jumlah penduduk. Semakin besar jumlah penduduk dengan kebutuhan dan selera tertentu akan meningkatkan permintaan atas barang atau jasa tertentu.
f. Perkiraan harga pada masa depan. Jika konsumen memperkirakan harga suatu barang naik pada masa akan datang, konsumen cenderung membeli barang saat ini atau sebelum harga barang naik.
g. Distribusi pendapatan. Jika distribusi pendapatan tidak merata, daya beli masyarakat rendah. Permintaan terhadap barang atau jasa akan menurun.
h. Strategi produsen. Agar masyarakat membeli barang atau jasa, produsen menerapkan strategi tertentu, misalnya

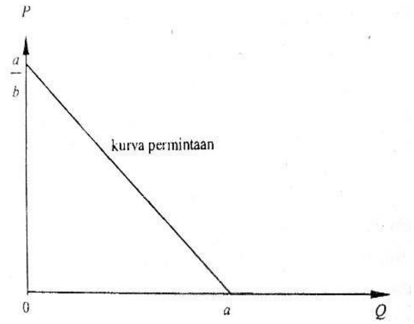
menggiatkan iklan, promosi, diskon, dan teknik pemasaran lain.

Bentuk umum fungsi permintaan

Q = a - bP atau	$P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q$

keterangan :

Q : Kuantitas unit produk
P : Price atau harga
B : $\Delta Qd/\Delta Pd$
a dan b : Konstanta, dimana b harus negatif



Gambar 15. Kurva fungsi permintaan

Dari gambar diatas terlihat bahwa variabel P (price,harga) dan variabel Q (quantity, jumlah) mempunyai tanda yang berlawanan. Hal ini mencerminkan hukum permintaan, bahwa apabila harga naik jumlah yang diminta akan berkurang dan apabila harga turun jumlah yang diminta akan bertambah. Gerakan harga berlawana dengan jumlah maka kurva permintaan bernilai negatif.

Contoh kasus

Pada saat harga jagung Rp. 5,- (dalam ribuan) per Kg permintaan jagung sebanyak 10 Kg, tetapi pada saat harga jagung meningkat menjadi Rp. 10,- per Kg permintaan akan jagung menurun menjadi 50 Kg, bentuklah fungsi permintaannya!

Penyelesaian :

Dari nilai yang diketahui di soal, untuk mencari fungsi permintaannya makadigunakan rumus persamaan garis melalui dua titik yaitu :

Tabel 1. Permintaan Jagung

Pd	Qd
5	**10**
10	5

Penyelesaian:
Berdasarkan tabel permintaan tersebut dapat dicari fungsi permintaan sebagai berikut:

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}$$

$$\frac{P-5}{10-5} = \frac{Q-10}{5-10}$$

$$\frac{P-5}{5} = \frac{Q-10}{-5}$$

5Q-50=-5P+25

5Q=-5P+75

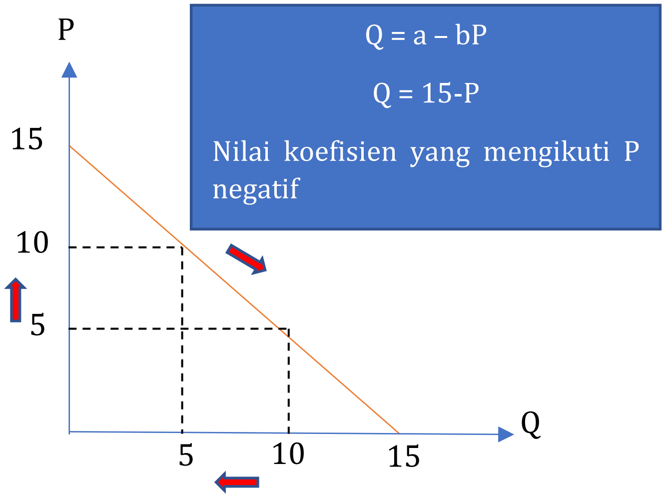
Q=-P+15

Qd=15-P

Kurva permintaan dapat dibentuk dengan memisalkan:

Jika P=0 maka Q=15

Jika Q=0 maka P=15



Gambar 16. Kurva permintaan jagung

2. **Fungsi Penwaran**

Fungsi penawaran yaitu fungsi yang menunjukkan hubungan harga produk dengan jumlah produk yang ditawarkan. Dalam fungsi penawaran menggunakan sudut pandang Penjual. Fungsi penawaran oleh produsen digunakan untuk menganalisa kemungkinan-kemungkinan kuantitas barang yang akan diproduksi. Sesuai hukum penawaran jika harga produk naik, dengan asumsi faktor-faktor lain dianggap konstan, maka jumlah produk yang ditawarkan akan naik, dan sebaliknya jika harga produk turun, jumlah produk yang ditawarkan juga turun.

Fungsi penawaran menghubungkan antara harga (P) dan jumlah barang yang ditawarkan (Qs) Faktor-faktor penting dalam penentuan penawaran antara lain :

a. Harga barang itu sendiri
b. Harga barang-barang lain yang berkaitan erat dengan barang tersebut
c. Biaya produksi

d. Tujuan-tujuan operasi perusahaan tersebut
e. Tingkat teknologi yang digunakan

Asumsi faktor-faktor lain dianggap tetap (ceteris paribus), analisis utama penawaran suatu barang dipengaruhi oleh harga (ada hubungan tingkat harga dengan jumlah barang yang ditawarkan penjual)." Fungsi penawaran dapat dideskripsikan dengan Kurva Penawaran (*Supply Curve*), yang terdiri dari unsur:

a. **Harga penawaran (Ps),** yaitu tingkat harga yang ditawarkan oleh produsen
b. **Jumlah barang yang ditawarkan (Qs),** yaitu jumlah barang yang ditawarkan

Bentuk umum fungsi penawaran yaitu:

$$\boxed{Q = -a + bP}$$

atau

$$\boxed{P = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}Q}$$

Contoh:
Diketahui penawaran sebagai berikut:

Tabel 2. Penawaran Barang

Ps	Qs
6	6
8	10

Berdasarkan table penawaran tersebut dapat dicari fungsi penawaran sebagai berikut:

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$\frac{P - 6}{8 - 6} = \frac{Q - 6}{10 - 6}$$

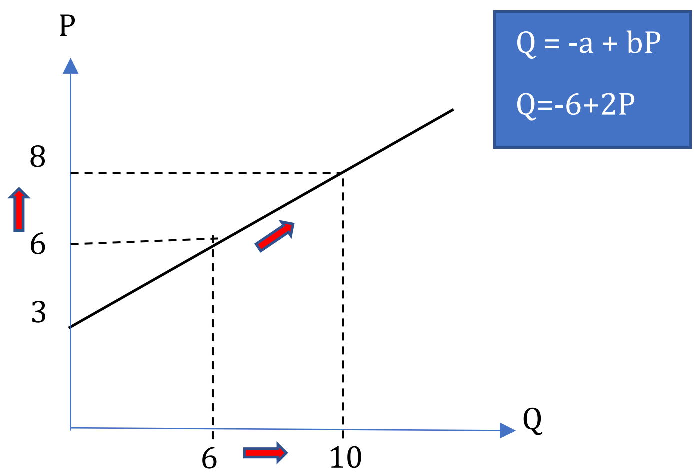
$$\frac{P - 6}{2} = \frac{Q - 6}{4}$$

2Q-12=4P-24

2Q=4P-12

Q=2P-6

Q=-6+2P



Gambar 17. Kurva penawaran barang

3. Keseimbangan Pasar

Dalam ilmu ekonomi, harga keseimbangan atau harga ekuilibrium adalah harga yang terbentuk pada titik pertemuan kurva permintaan dan kurva penawaran. Terbentuknya harga dan kuantitas keseimbangan di pasar merupakan hasil kesepakatan antara pembeli (konsumen) dan penjual (produsen) di mana kuantitas yang diminta dan yang ditawarkan sama besarnya. Pasar suatumacam barang dapat dikatakan berada dalam keseimbangan(equilibrium) apabila jumlah barang yang diminta dipasar (Qd) sama dengan jumlah yang ditawarkan (Qs).

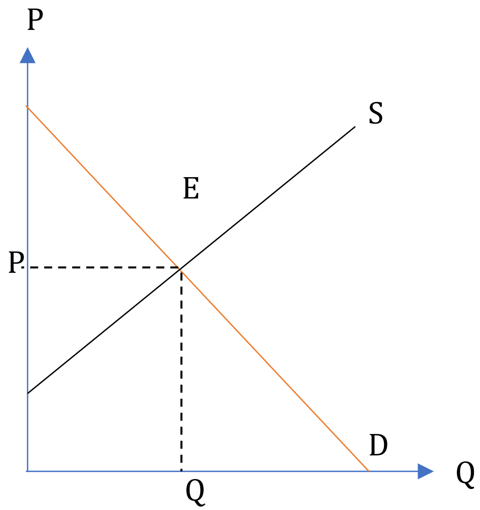
$$\boxed{Q_d = Q_s}$$

Keterangan:

Qd :jumlah barang yang diminta

Qs :jumlah barang yang ditawarkan

Grafik terjadinya keseimbangan pasar dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 18. Kurva keseimbangan pasar

Grafik ini ditunjukan oleh kesamaan Qd = Qs yakni perpotongan kurva permintaan dengan kurva penawaran. Pada posisi keseimbangan pasar ini tercipta hara keseimbangan (*equilibrium price*) dan jumlah keseimbangan (*EquilibriumQuantity*).

Contoh kasus:

Diketahui permintaan dan penawaran komoditas cabai di pasar.

Permintaan: P = 15 – Q Q = 15 – P

Penawaran: P = 3 + 0,5Q Q = -6 + 2P

Berdasarkan persamaan di atas, carilah keseimbangan pasar yang terjadi.

Penyelesaian:

$Q_d = Q_s$

15-P = -6+2P

3P = 21

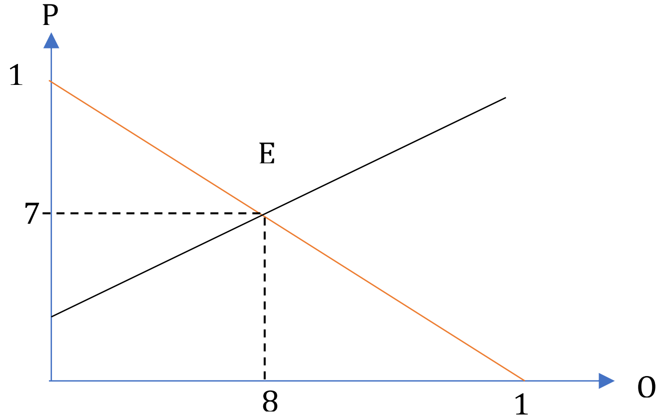
P = 7

Harga keseimbangan terjadi pada harga 7. Selanjutnya masukkan harga ke dalam salah satu fungsi permintaan atau penwaran untuk mencari kuantitas keseimbangan.

Q = 15 - P

Q = 15 – 7

Q = 8



Gambar 19. Kurva keseimbangan pasar cabai

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada saat harga (P) sebesar 7 dan kuantitas (Q) sebesar 8.

4. Keseimbangan Pasar Setelah Pajak dan Subsidi

Kebijakan pemerintah sangat mempengaruhi kondisi perekonomian. Salah satu kebijakan yang berdampak langsung dengan perekonomian yaitu kebijakan fiskal berupa penentuan pajak dan pemberian subsidi bagi produsen. Pajak dan subsidi akan mempengaruhi perubahan harga, sehingga secara tidak langsung juga akan berdampak pada perubahan keseimbangan pasar barang maupun jasa.

a. Pajak

Pajak merupakan pungutan yang ditarik oleh pemerintah terhadap wajib pajak. Pajak yang dipungut pemerintah dapat bersifat pajak langsung dan tidak langsung. Pajak langsung merupakan pajak yang dipungut secara langsung dari wajib pajak, seperti pajak kekayaan, pajak pendapatan, dan pajak perseroan. Sedangkan pajak tidak langsung merupakan pajak yang dipungut pemerintah secara tidak langsung dari wajib pajak, tetapi melalui wajib pungut yang kemudian menyetorkan pajak kepada pemerintah, seperti pajak penjualan dan pajak tontonan.

Dalam pembahasan mengenai perpajakan ini kita membedakaan pajak yang dikenakan terhadap suatu barang tertentu atas pajak per unit dan pajak proporsional.

1) Pengaruh Pajak-Spesifik Terhadap Keseimbangan Pasar

Pajak atas barang yang dijual menyebabkan harga jual barang tersebut naik. Produsen akan mengalihkan beban pajak penjualan kepada konsumen dengan cara menaikkan harga. Pengenaan pajak sebesar t atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan kurva penawaran bergeser ke atas, dengan penggal yang lebih tinggi pada sumbu harga. Jika sebelum pajak persamaan penawarannya $P = a + bQ$ maka sesudah pajak ia akan menjadi $P = a + bQ + t = (a + t) + bQ$.

2) **Contoh Kasus**

Diketahui:

Permintaan: $P = 15 - Q$ $Q = 15 - P$

Penawaran: $P = 3 + 0{,}5Q$ $Q = -6 + 2P$

Pajak: 3 per unit

a) Berapakah keseimbangan pasar yang terjadi sebelum dan setelah adanya pengaruh pajak?

b) Berapa pajak yang harus ditanggung produsen dan konsumen?

c) Berapa pajak yang diterima oleh pemerintah?

Penyelesaian:

Sesudah pajak, harga jual yang ditawarkan oleh produsen menjadi lebih tinggi, persamaan penawar-annya berubah dan kurvanya bergeser keatas.

Penawaran sebelum pajak:

$P = 3 + 0{,}5Q$

Penawaran sesudah pajak:

$P = 3 + 0{,}5Q + 3$

$P = 6 + 0{,}5\ Q$

$Q = -12 + 2P$

a) Keseimbangan pasar sebelum pajak:

$Q_d = Q_s$

$15 - P = -6 + 2P$

$3P = 21$

$P = 7$

$Q = 15 - P$

$Q = 15 - 7$

$Q = 8$

Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak terjadi pada saat harga (P) sebesar 7 dan kuantitas (Q) sebesar 8.

Keseimbangan pasar setelah pajak:

$15-P = -12+2P$

$3P = 27$

$P = 9$

Masukkan harga pada salah persamaan untuk menemukan kuantitas keseimbangan pasar setelah adanya pengaruh pajak.

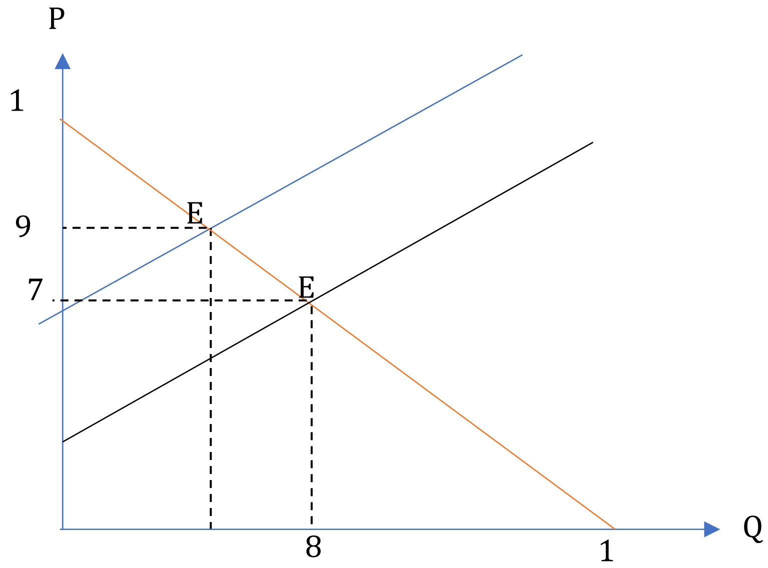
$Q = 15-P$

$Q = 15-9$

$Q = 6$

Jadi keseimbangan pasar setelah pajak terjadi pada saat harga (Pe) sebesar 9 dan kuantitas (Qe) sebesar 6. Kenaikan harga dari 7 menjadi 9 mengakibatkan terjadinya pergeseran kuantitas menurun dari 8 menjadi 6.

Kondisi tersebut dapat diilustrasikan pada grafik keseimbangan pasar sebagai berikut.



Gambar 20. Kurva keseimbangan pasar setelah pajak

b) Beban pajak yang ditanggung konsumen (tk)

Rumus : **tk = P’e – P**, Dalam contoh kasus diatas, tk = 9 – 7 = 2

c) Beban pajak yang ditanggung produsen (tp)

Rumus : **tp = t – tk**, Dalam contoh kasus, tp = 3 – 2 = 1

d) Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah (T)

Rumus : **T = Q’e . t,** Dalam contoh kasus, T = 6 X 3 = 18

FUNGSI NON LINEAR

A. Fungsi Non Linear

Fungsi-fungsi lain yang pangkat tertinggi dari variabelnya lebih dari satu, secara umum disebut fungsi non linear. Fungsi non linier meliputi fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi bikuadrat, dan seterusnya. Penggambaran fungsi non-linear tidak semudah fungsi linear. Meskipun prinsipnya secara umum sama, yakni dengan terlebih dahulu mencari sejumlah titik koordinat yang memenuhi persamaan fungsinya, namun prakteknya tidaklah mudah. Bukan saja karena kurvanya yang jelas akan tidak linear, sehingga relative sulit untuk dilukiskan, tetapi juga karena terdapat tidak hanya satu macam fungsi non-linear. Masing-masing fungsi non-linear mempunyai bentuk khas mengenai kurvanya, sehingga harus diamati kasus demi kasus.

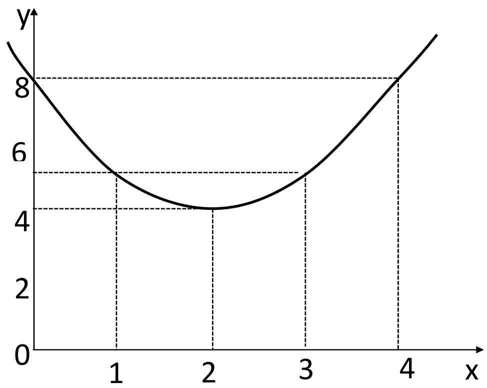
Contoh penggambaran fungsi non-linear:

1. Fungsi Kuadrat Parabolik Sejajar Sumbu Vertikal

$y = 8 - 4x + x^2$

Tabel 3. Titik Koordinat Kurva Parabolik 1

x	0	1	2	3	4
y	8	5	4	5	8



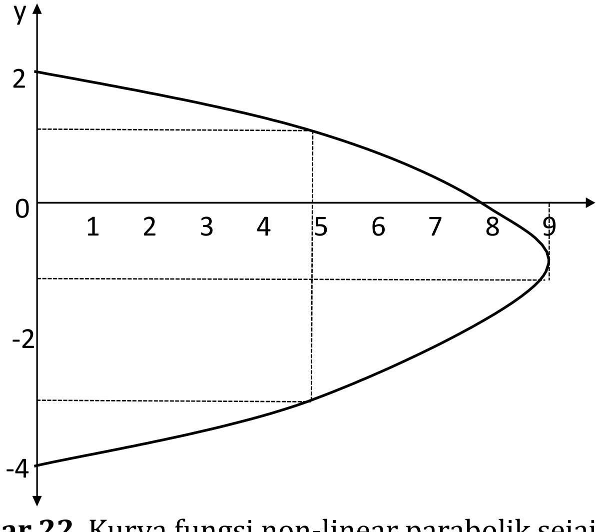
Gambar 21. Kurva fungsi non-linear parabolik sejajar sumbu vertikal

2. Fungsi Kuadrat Parabolik Sejajar Sumbu Horizontal

$x = 8 - 2y - y^2$

Tabel 4. Titik Koordinat Kurva Parabolik 2

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2
x	0	5	8	9	8	5	0



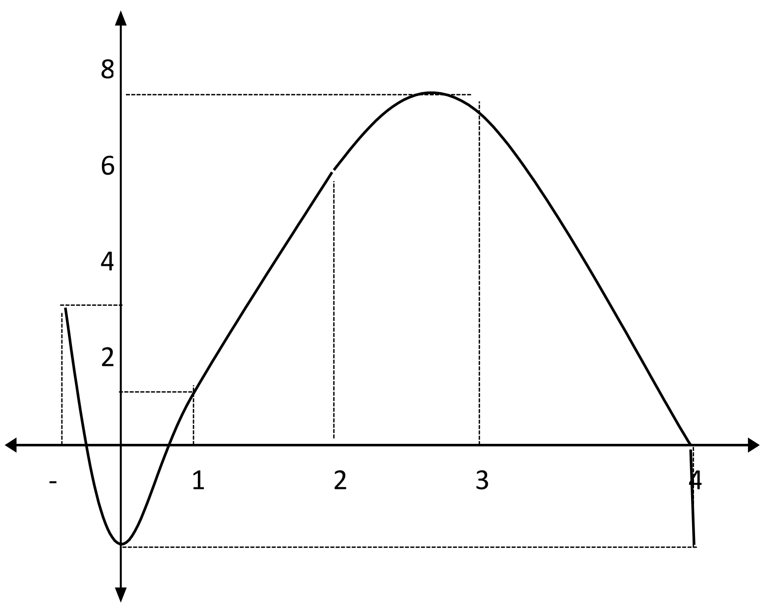
Gambar 22. Kurva fungsi non-linear parabolik sejajar sumbu horizontal

3. **Fungsi Kubik**

$y = -2 + 4x^2 - x^2$

Tabel 5. Titik Koordinat Fungsi Kubik

y	-1	0	1	2	3	4
x	3	-2	1	6	7	-2



Gambar 23. Kurva fungsi non-linear kubik

B. Sifat-Sifat Fungsi Non Linier

Kurva non-linear mempunyai sifat-sifat tertentu. Melalui sifat-sifat khas ini dapat diantisipasi atau diketahui pola kurvanya. Berdasarkan pengetahuan akan sifat-sifat ini, penggambaran fungsi non-linear dapat dilakukan dengan menggunakan lebih sedikit titik koordinat. Sifat-sifat kurva non-linear meliputi penggal, simetri, perpanjangan, asimtot, dan faktorisasi.

1. **Penggal**

Penggal sebuah kurva adalah titik-titik potong kurva tersebut pada sumbu-sumbu koordinat. Penggal pada sumbu x dapat dicari dengan memisalkan y = 0 dalam persamaan yang bersangkutan, sehingga nilai x dapat dihitung. Penggal pada sumbu y dicari dengan memsialkan x = 0, sehingga nilai y dapat dihitung.

Contoh : $y = 16 - 8x + x^2$

Penggal pada sumbu x: $y = 0 - x = 4$

Penggal pada sumbu y: $x = 0 - y = 16$

2. **Simetri**

Dua titik dikatakan simetrik terhadap sebuah garis apabila garis tersebut berjarak sama terhadap kedua titik tadi dan tegaklurus terhadap segmen garis yang menghubungkannya. Dua buah titik dikatakan simetrik terhadap titik ketiga apabila titik ketiga ini terletak persis ditengah segmen garis yang menghubungkan kedua titik tadi.

Titik (x, y) adalah simetrik terhadap titik:

a (x, -y) sehubungan dengan sumbu x.

b. (-x, y) sehubungan dengan sumbu y.

c. (-x, -y) sehubungan dengan titik pangkal.

Sebuah kurva akan simetrik terhadap sumbu x, jika untuk setiap titik (x, y) pada kurvaitu titik simetri (x, -y) juga terdapat kurva tersebut , yakni jika penggantian y oleh –y , dalam persamaannya menghasilkan persamaan yang ekivalen.

Sebuah kurva akan simetrik terhadap sumbu y, jika untuk setiap titik (x, y) pada kurvaitu titik simetri (-x, y) juga terdapat pada kurva tersebut, yakni jika pengganti x oleh –x, dalam persamaannya menghasilkan persamaan yang ekivalen.

Sebuah kurva akan simetrik terhadap pangkal, jika untuk setiap titik (x, y) pada kurva itu titik simetri (-x, -y) juga terdapat pada kurva tersebut, yakni jika penggantian x oleh –x dan y oleh –y dalam persamaannya menghasilkan persamaan yang ekivalen.

Secara ringkas dapat dirumuskan bahwa kurva dari suatu persamaan $f(x, y) = 0$ adalahsimetris terhadap:

a. Sumbu *x* jika $f(x, y) = f(x, -y) = 0$
b. Sumbu y jika $f(x, y) = f(-x, y) = 0$
c. Titik pangkal jika $f(x, y) = f(-x, -y) = 0$

3. **Perpanjangan**

Titik-titik (x, y) pada bidang sepasang sumbu silang (sistem koordinat) sesungguhnya hanya mencerminkan koordinat-koordinat yang terdiri atas bilangan -bilangan nyata. System koordinat tersebut tidak berlaku bagi titik-titik koordinat yang mengandung bilangan khayal. Jadi, nilai-nilai x untuk y yang berupa bilangan khayal tak dapat di tempatkan disitu, sehingga harus keluar dari bidang sepasang sumbu-silang tersebut.

Jika sebuah persamaan mengandung fariabel berpangkat genap, maka penyelesaian untuk variabel yang bersangkutan akan melibatkan akar berpamgkat genap. Konsekuensinya, perpanjangan kurva dari persamaan yang demikian boleh jadi terbatas, mengingat bilangan negatif dibawah tanda akar akan selalu mengahasilkan bilangan khayal. Dalam menyelidiki terdapat atau tidaknnya batas perpanjangan sebuah kurva, sebaiknya (jika dimungkinkan) persamaanya dieksplisitkan untuk masing-masing variable agar dapat diketahui batas perpanjangan pada masing-masing fariabel tersebut. Patut di catat, kehadiran batas perpanjangan pada salah satu variable dapat dengan sendirinya membatasi perpanjangan pada variabel lainya.

4. **Asimtot**

Asimtot suatu kurva adalah sebuah garis lurus yang jaraknya semakin dan semakin dekat dengan salah satu ujung kurva tersebut. Jarak itu sendiri tidak akan menjadi nol; atau dengan perkataan lain, garis lurus dan kurva tadi tidak sampai berpotongan. Jadi, suatu kurva dikatakan asimtotik terhadap sebuah garis lurus tertentu apabila salah satu ujung kurva semakin dan semakin mendekati garis yang bersangkutan.

Pembicaraan tentang asimtot tak dapat tidak melibatkan konsep limit. Secara umum, garis $y = a + bx$ merupakan asimtot kurva $y = f(x)$ jika $f(x)$ senantiasa lebih kecil atau senantiasa lebih besar dari $a + bx$ dan semakin mendekati $a + bx$ apabila x dan y diperpanjangtanpa batas. Dengan notasi limit, hal ini dituliskan sebagai $f(x) \to a + bx$ apabila $x, y \to \infty$.

5. **Faktorisasi**

Faktorisasi fungsi maksudnya ialah menguraikan ruas utama fungsi tersebut menjadi bentuk perkalian ruas – ruas utama dari dua fungsi yang lebih kecil. Sebagai contoh, faktorisasi sebuah fungsi yang memiliki persamaan $f(x, y) = 0$ berarti membentuk sedemikian rupa sehingga diperoleh $f(x, y) = g(x, y)$. $h(x, y)$. [catatan: $f(x, y)$ disebut ruas utama dari $f(x,y) = 0$]. Dalam menghadapi persamaan $f(x, y) = 0$ seringkali, karena kompleksnya jalinan antara x dan y, kita mengalami kesukaran untuk menggambarkan kurvanya. Kesukaran demikian bias diatasi dengan jalan memfaktorkan (menguraikan) fungsi tersebut, jika hal ini menguraikan (tidak semua fungsi dapat difaktorkan). Gambar yang dihasilkan akan terdiri atas gambar dan fungsi-fungsi yang lebih kecil. Jadi, jika $f(x, y) = 0$ dapat difaktorkan menjadi $g(x, y) \cdot h(x, y) = 0$ maka gambar dari $f(x, y) = 0$ akan terdiri atas gambar-gambar dari $g(x, y) = 0$ dan $h(x, y) = 0$. Penyelidikan mengenai faktorisasi adalah penting, mengingat sebuah persamaan kompleks yang dapat difaktorkan sulit digambarkan dengan tepat apabila tidak difaktorkan. (persamaan-kompleks disini ialah persamaan yang mengandung suku berbentuk hasil kali antara variabel bebas dan terikat, misalnya $x^2 - 5y^2 + 3xy = 0$)

C. Penerapan Fungsi Non Linier dalam Ekonomi

1. Fungsi Biaya

Biaya dalam kegiatan produksi merupakan sesuatu yang harus dikorbankan oleh produsen untuk menghasilkan barang atau jasa. Biaya total (*total cost/TC)* meliputi biaya implisit dan biaya eksplisit. Biaya eksplisit terdiri dari biaya tetap dan biaya variabel.

$$TC = FC + VC = k + f(Q) = c(Q)$$

Keterangan:
C :*total cost* (biaya total)
FC :*fixed cost* (biaya tetap)
VC :*variable cost* (biaya variabel)
k :konstanta
Q :kuantitas barang
Contoh:
Sebuah perusahaan memiliki persamaan biaya total, $\boldsymbol{TC = 2Q^2 + 15Q + 100}$.

2. Biaya tetap

Biaya tetap yaitu biaya yang harus dikeluarkan oleh produsen tanpa dipengaruhi oleh jumlah barang yang diproduksi. Biaya tetap juga diistilahkan dengan *fixed cost* (FC).

$$FC = k \ (k : \text{konstanta})$$

Biaya tetap dalam fungsi biaya total berupa jumlah tertentu atau konstanta (k). Hal ini karena biaya tetap tidak bergantung pada kuantitas (Q).

3. Biaya variabel

Biaya variabel (*variable cost*/VC) merupakan biaya yang jumlahnya dipengaruhi oleh jumlah barang yang diproduksi. Semakin banyak jumlah barang diproduksi, maka biaya variabel semakin besar.

$$VC = f\ (Q)$$

Contoh kasus:

Sebuah perusahaan memiliki persamaan biaya total, $\boldsymbol{TC = 2Q^2 + 15Q + 100}$. Tunjukkan fungsi biaya tetap dan biaya variabelnya!

Penyelesaian:

$$\boldsymbol{TC = 2Q^2 + 15Q + 100}$$
$$\boldsymbol{FC = 100}$$
$$\boldsymbol{VC = 2Q^2 + 15Q}$$

4. Biaya rata-rata

Biaya rata-rata (*average cost*) yaitu biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk atau keluaran. Biaya rata-rata (VC) diperoleh dari hasil bagi biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan. Biaya rata-rata juga mencakup biaya tetap rata-rata (*average fixed cost/AFC*) dan biaya variabel rata-rata (*average variable cost/AVC*).

$$AFC = \frac{FC}{Q}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q}$$

$$AC = \frac{C}{Q} = AFC + AVC$$

Keterangan:

AFC :*average fixed cost* (biaya tetap rata-rata)
AVC :*average variable cost* (biaya variabel rata-rata)
AC :*average cost* (biaya rata-rata)

5. Biaya marginal

Biaya marjinal (*marginal cost*) ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$

Penerapan ekonomi fungsi non-linear pada fungsi biaya sering ditemukan dalam bentuk fungsi kuadrat parabolik dan fungsi kubik. Berikut ini contoh fungsi biaya dalam bentuk fungsi kuadrat parabolik dan fungsi kubik.

6. Kasus Fungsi Biaya Parabolik

Contoh :

$C = aQ^2 - bQ + c$

Sebuah perusahaan pakaian PT Gaya Baru memiliki fungsi biaya parabolik, $TC = 3Q^2 - 5Q + 150$. Berdasarkan fungsi biaya tersebut dapat ditentukan biaya variabel rata-rata dan biaya tetap rata-rata sebagai berikut.

maka :

$$AC = C/Q = aQ - b + c/Q$$

$$AVC = VC/Q = aQ - b$$

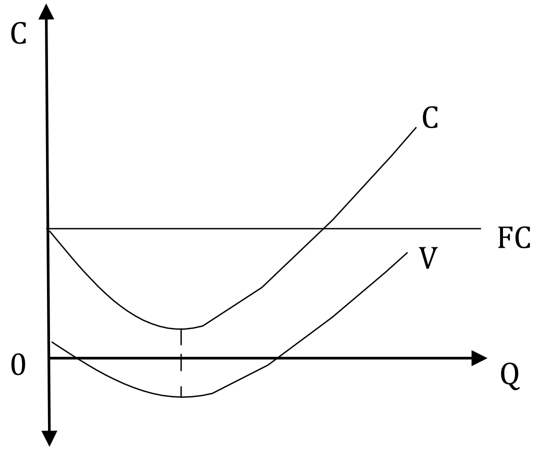
$$AFC = FC/Q = c/Q$$

$$AC = \frac{3Q^2 - 5Q + 150}{Q}$$

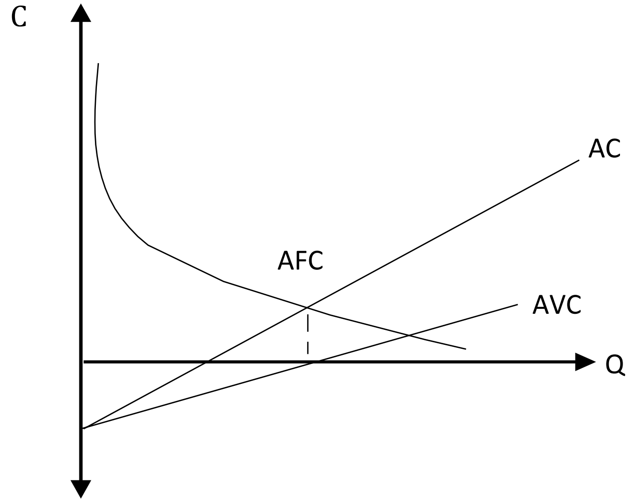
$$AVC = \frac{3Q^2 - 5Q}{Q}$$

$$AFC = \frac{150}{Q}$$

Kurva biaya secara parabolik dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 24. Kurva fungsi biaya



Gambar 25. Kurva fungsi biaya rata-rata

Kurva fungsi biaya (C) berbentuk parabola melengkung ke atas. Kurva tersebut memiliki titik minimum yang dalam penerapan memiliki berbagai makna untuk kegiatan produksi. Titik minimum atau titik esktrim fungsi biaya (C) secara matematis dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$Q = \frac{-b}{2a}$$

Ketika titik ekstrim atau nilai minimum kuantitas produksi (Q) dapat dicari, maka nilai biaya (C) juga dapat diketahui dengan rumus:

$$\frac{b^2 - 4ac}{-4a}$$

Jika terdapat persamaan C = $3Q^2 - 5Q + 150$, maka titik ekstrim fungsi tersebut yaitu:

$$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2.3} = \frac{5}{6}$$

7. Fungsi Kubik

Selain fungsi parabolik, fungsi biaya juga dapat berbentuk fungsi kubik. Fungsi kubik merupakan fungsi dengan pangkat tiga. Bentuk fungsi kubik dari fungsi biaya dapat dimisalkan sebagai berikut.

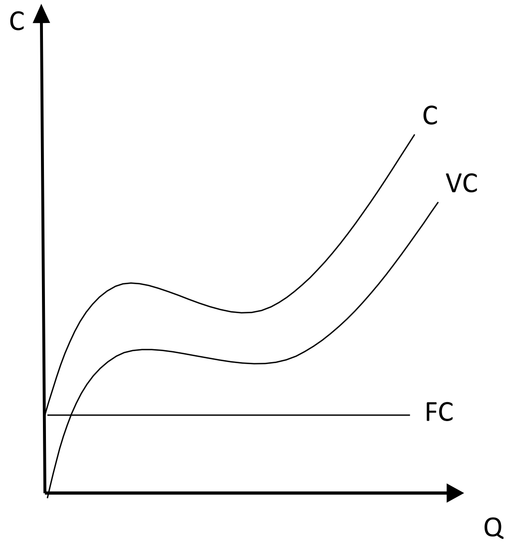
$$C = aQ^3 - bQ^2 + cQ + k$$

$$AC = \frac{aQ^3 - bQ^2 + cQ + k}{Q}$$

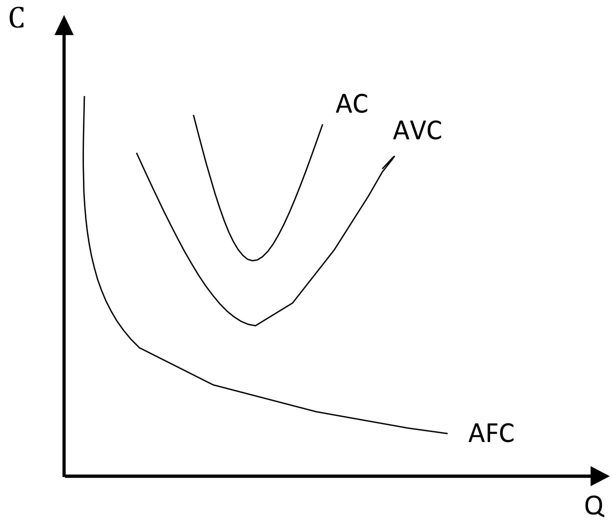
$$AVC = \frac{aQ^3 - bQ^2 + cQ}{Q}$$

$$AFC = \frac{k}{Q}$$

Berbagai fungsi rata-rata dari fungsi biaya (C) yang terdiri dari AC, AVC, dan AFC jika digambarkan dalam kurva fungsi kubik tampak seperti gambar berikut ini.



Gambar 26. Kurva fungsi biaya (kubik)



Gambar 27. Kurva fungsi biaya rata-rata (kubik)

8. Fungsi Penerimaan

Fungsi penerimaan biasa disebut juga sebagai total revenue (R). Pada persamaan non linier, persamaan pada fungsi penerimaan berbentuk sebuah parabola terbuka kebawah dan lazim dihadapi oleh produsen yang beroperasi di pasar monopoli. Hal ini tentu berbeda dengan fungsi penerimaan pada persamaan linier yang terjadi dihadapi oleh seorang produsenyang beroperasi di pasar persaingan sempurna.

Terdapat 3 jenis penerimaan yang ada pada fungsi penerimaan non linier, diantaranya :

a. **Penerimaan total**

Penerimaan total (*total revenue/TR*) merupakan (fungsi dari jumlah barang) yang merupakan hasil kali jumlah barang dengan **harga barang per unit.**

$$TR = P\ x\ Q$$

Keterangan:
TR:*total revenue* (penerimaan total)
P :*price* (harga)
Q :*quantity* (jumlah barang)

b. **Penerimaan Rata-Rata**

Penerimaan Rata-Rata (average revenue/AR) atau dapat juga disebut sebagai **penerimaan yang diperoleh per unit barang**, yang merupakan hasil bagi penerimaan total terhadap jumlah barang.

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{P\ x\ Q}{Q} = P$$

Keterangan:
TR :*total revenue* (penerimaan total)
AR :*average revenue* (penerimaan rata-rata)
P :*price* (harga)
Q :*quantity* (jumlah barang)

Penerimaan rata-rata juga merupakan harga barang (P) per unit mengingat hasil bagi total rata-rata (TR) terhadap jumlah barang (Q) menghasilkan P.

c. **Penerimaan Marginal**

Jenis penerimaan terakhir dikenal adanya penerimaan **marjinal** (*marginal revenue*/MR) yang merupakan **penerimaan tambahan** yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dihasilkan atau terjual.

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}$$

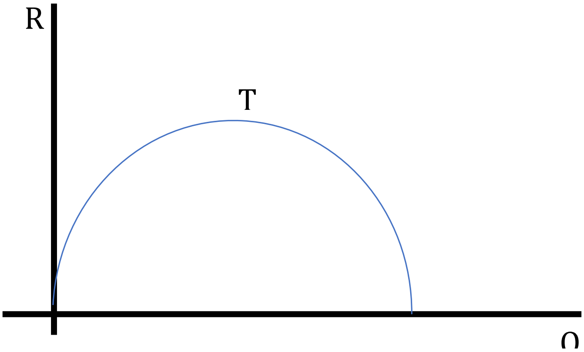
Keterangan:

TR :*total revenue* (penerimaan total)
MR :*marginal revenue* (penerimaan marjinal)
Q :*quantity* (jumlah barang)
Δ :selisih

Penerimaan marginal juga merupakan turunan pertama dari total penerimaan.

$$\boxed{\begin{gathered} R = Q\ x\ P\ atau\ P = \frac{R}{Q} \\ AR = \frac{R}{Q},\ sehingga\ P = AR \end{gathered}}$$

Bentuk fungsi penerimaan total (*total* revenue*, TR)* yang non linear umumnya berupa sebuah persamaan parabola terbuka ke bawah



Gambar 28. Kurva penerimaan total

Contoh Kasus

Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukkan oleh $P = 900 - 1{,}5Q$.

a. Bagaimana persamaan penerimaan totalnya (TR)?

b. Berapa besarnya penerimaan total jika terjual barang sebanyak 200 unit, dan berapa harga jual per unit?

c. Hitunglah penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit?

d. Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan total maksimum tersebut?

Penyelesaian:

a. Bagaimana persamaan penerimaan totalnya (TR)?

$$TR = P\,x\,Q = (900 - 1{,}5Q)Q$$

$$TR = 900Q - 1{,}5Q^2$$

b. Berapa besarnya penerimaan total jika terjual barang sebanyak 200 unit, dan berapa harga jual per unit?

TR, P saat Q=200

$$TR = 900Q - 1{,}5\,Q^2$$

$$TR = (900)200 - 1{,}5(200)^2$$

$$TR = 120.000$$

$$P = \frac{R}{Q} = \frac{120.000}{200} = 600$$

Jadi total penerimaan pada saat barang yang terjual sebanyak 200 unit yaitu 120.000, dengan tingkat harga 600.

c. Hitunglah penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit?

$MR = TR' atau = \frac{\Delta R}{\Delta Q}$

$Q = 250\ maka,$

$TR = 900(250) - 1{,}5((250)^2$

TR = 131.250

$MR = TR'$

$atau = \frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{131.250 - 120.000}{250 - 200} = \frac{11250}{50}$

$MR = 225$

Jadi penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit yaitu 225.

d. Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan total maksimum tersebut?

$R = TR = 900Q - 1{,}5\ Q^2$

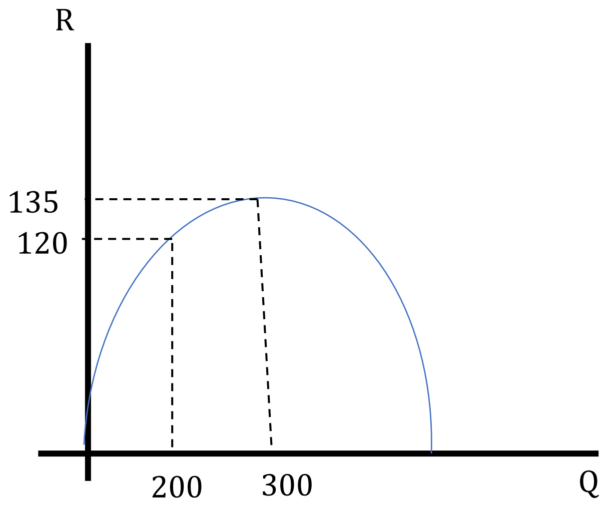
Titik ekstrim maksimum kurva parabola terjadi saat:

$TR' = MR = 0$

$$atau\ Q = -\frac{b}{2a} = \frac{-900}{2(-1{,}5)} = 300$$

$TR = 900(300) - 1{,}5\ (300)^2$

$TR = 135.000$



Gambar 29. Kurva penerimaan maksimum

Jadi penerimaan total maksimum terjadi pada titik ekstrim parabola kurva parabola yaitu saat Q sebesar 300 dan penerimaan total sebesar 135.000.

DIFFERENSIAL

A. Kuosien Diferensi dan Derivatif

Diferensial (turunan) yaitu pengukuran dari besaran suatu fungsi yang berubah akibat perubahan nilai input. Penerapan diferensial dalam ekonomi dapat digunakan untuk mempelajari titik maksimum, titik minimum, dan titik belok. Oleh karena itu, diferensial merupakan salah satu alat analisis yang penting dalam bisnis dan ekonomi. Misalnya, jika terdapat fungsi y = f(x) dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δ*x*.

Diferensial membahas tentang tingkat perubahan fungsi tersebut, sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan (ΔX).

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Maka

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- ❑ Δ x adalah tambahan x, sedangkan Δ y adalah tambahan y akibat adanya tambahan x. Jadi Δy timbul karena adanya Δx.
- ❑ Apabila pada persamaan (1) ruas kiri dan ruas kanan sama-sama dibagi Δx, maka diperoleh

Persamaan di atas, ditemukan Δy/ Δx yang merupakan hasil bagi perbedaan atau kuosien diferensi (difference quotient), yang mencerminkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap perubahan variabel bebas x. Sedangkan, penurunan fungsi disebut juga proses diferensiasi yang merupakan penentuan limit suatu kuosien diferensi (Δx sangat kecil). Hasil proses diferensiasi dinamakan turunan atau derivatif (*derivative*).

Apabila terdapat fungsi *y = f(x), maka* kuosien diferensinya:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Atau dapat ditentukan dengan rumus:

$$y = a\,x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = n\,a\,x^{n-1}$$

Tabel 6. Kaidah-kaidah differensial

Kaidah-kaidah	Rumus	Contoh
Diferensiasi kontanta	**Jika** : y = k y' = 0	y=5 y=0
Diferensial fungsi pangkat	Jika: $y = X^n$ $y' = n X^{n-1}$	$y=X^3$ $y' = 3x^{3-1}$ $= 3x^2$
Diferensiasi perkalian kontanta dengan fungsi	Jika : y= k v dimana v = h (x)y' = k v'	$y = 5 x^3$ $y' = 5 (3x^{3-1})$ $= 15 x^2$

Kaidah-kaidah	Rumus	Contoh
Diferensiasi pembagian konstanta dengan fungsi	Jika : y = $\frac{k}{v}$ dimana v = h(x) y' = $\frac{k'}{v^2}$	y = $\frac{5}{x^2}$ y' = $\frac{5(2x)}{x^4}$
Diferensiasi penjumlahan (pengurangan) fungsi	Jika y = uv dimana u= g(x) dan v= h (x) y' = uv'+ vu'	y = $4x^6 - 6x^4$ y'= $24x^5 - 24x^3$
Diferensiasi perkalianfungsi	Jika y = u dimana u= g(x) dan v =h(x) y' = uv'+ vu'	y = $4x^2 (x^3)$ u=$4x^2$ v= x^3 u'= 4(2x) v'= $3x^2$y' = $4(x^2)(3x^2) + (x^3)\ 4(2x)$ y' = $12x^4 + 8x^4$ = $20x^4$
Diferensasi pembagian fungsi	Jika y= u dimana u = g(x)	y= $4x^2$ dimana u = $4x^2$ dan v = x^3 u'= 8x dan v' = $3x^2$

B. Diferensial Dalam Penerapan Ekonomi

1. Elastisitas

Elastisitas berasal dari kata “elastis” yang bermakna kondisi yang mudah berubah dan dapat kembali pada kondisi semula (KBBI online https://kbbi.web.id/elastis). Berbagai alat pemenuh kebutuhan manusia berupa barang memiliki tingkat elastisitas masing-masing pada sisi permintaan dan penawaran. Perubahan jumlah barang yang diminta maupun ditawarkan dipengaruhi oleh faktor-faktor tertentu.

a. Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan terhadap harga menunjukkan persentase perubahan jumlah barang yang diminta akibat persentase perubahan harga yang terjadi pada barang tertentu (Hamid dan Maulana, 2019: 97). Jadi, elastisitas permintaan yaitu perubahan jumlah barang yang diminta dikarenakan perubahan faktor harga. Nilai elastisitas permintaan ditentukan dari rasio persentase perubahan barang terhadap perubahan harga.

$$E_s = \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P_d} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}.\frac{P}{Q}$$

Rasio $\frac{\Delta Q_d}{\Delta P_d}$ dalam kaidah diferensial merupakan bentuk turunan pertama dalam fungsi *f (Qd) maupun f (P).* Turunan pertama tersebut juga biasa dinotasikan dengan *Q'd* atau *f'(P).* Permintaan barang dikatakan elatis jika nilai elastisitasnya Ed>1. Elastisitas permintaan biasanya bernilai negatif yang bermakna respon perubahan jumlah barang terhadap harga bersifat berbanding terbalik. Sebaliknya, jika nilai elastisitasnya Ed<1 maka permintaan barang tersebut inelastis. Makna inelastis yaitu persentase respon perubahan jumlah barang yang diminta lebih kecil dibandingan perubahan harga barang tersebut.

b. Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran yaitu perubahan jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen ketika terjadi perubahan harga barang tersebut.

$$E_s = \frac{\%\Delta Q_s}{\%\Delta P_s} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}.\frac{P}{Q}$$

Terdapat factor dominan dan factor lain yang dapat mempengaruhi elastisitas harga penawaran (Hidayati, 2019: 83). Factor dominan tersebut diantaranya.

1) Sifat perubahan biaya produksi

   Penawaran tidak bersifat elastis apabila dalam meningkatkan kuantitas penawaran dilakukan dengan biaya yang tinggi. Namun apabila biaya yang dikeluarkan tidak terlalu tinggi, maka penawaran akan bersifat elastis.

2) Jangka waktu analisis

   Fakta menunjukkan bahwa waktu mengambil peran dalam rangka penawaran menyesuaikan perubahan harga.

   a) Waktu yang singkat dimana penawaran tidak mengalami perubahan jumlah penawaran, maka elastisitas yang terjadi cenderung bersifat inelastis sempurna.
   b) Jangka pendek, dimana kegiatan produksi yang lakukan tidak menambah biaya tetap dan menggunakan sumber daya secara efisien, maka elastisitas yang terjadi cenderung bersifat inelastis.
   c) Jangka Panjang, dimana produsen dengan mudah dapat mengubah stok barang, maka elastisitas cenderung bersifat elastis.

   Nilai elastisitas penawaran biasanya bernilai positif, yang bermakna rasio perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap harga barang berbanding lurus. E_s>1 dikatakan bersifat elastis, yang mana peningkatan harga barang sebesar 1% direspon dengan peningkatan jumlah barang yang ditawarkan lebih dari 1%.

2. Fungsi Pendapatan

Bab ini menyelidiki sifat dasar dari fungsi pendapatan (TR). TR didefinisikan sebagai PxQ, di mana P menunjukkan harga suatu barang dan Q menunjukkan jumlah yang diminta. Dalam praktiknya, kita biasanya mengetahui persamaan permintaan, yang memberikan hubungan antara P dan Q. Hal ini memungkinkan rumus untuk TR ditulis hanya dalam bentuk Q. Misalnya, jika:

$$P = 100 - Q$$

maka

$$TR = PQ = (100 - Q)Q = 100Q - Q^2$$

Rumus tersebut dapat digunakan untuk menghitung nilai TR yang sesuai dengan nilai Q dalam bentuk apa pun. Selain itu, terdapat kemungkinan efek pada TR dari perubahan nilai Q dari beberapa level penerimaan. Perubahan nilai pada level-level terrtentu dikenal dengan konsep pendapatan marjinal (*marginal revenue, MR*). Pendapatan marjinal, MR, dari suatu barang ditentukan oleh:

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ}$$

Pendapatan marjinal adalah turunan dari pendapatan total (TR) sehubungan dengan permintaan. Misalnya, fungsi pendapatan marjinal dari:

$$TR = 100Q - Q^2$$

Menjadi

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 2Q$$

Jika permintaan saat ini adalah 10, maka:

$$MR = 100 - 2Q = 100 - 2(10) = 80$$

Pendapatan marjinal kadang-kadang dianggap sebagai perubahan TR yang disebabkan oleh peningkatan 1 unit di Q. Sangat mudah untuk memeriksa bahwa ini memberikan perkiraan yang dapat diterima untuk MR, meskipun tidak persis sama dengan nilai eksak yang diperoleh dengan diferensiasi. Misalnya, mensubstitusi Q = 10 ke dalam fungsi pendapatan total yang dipertimbangkan sebelumnya memberikan

$$TR = 100Q - Q^2 = 100(10) - 10^2 = 900$$

Peningkatan 1 unit dalam nilai Q menghasilkan pendapatan total

$$TR = 100Q - Q^2 = 100(11) - 11^2 = 979$$

Perubahan 1 unit Q berdampak pada TR sebesar 79, yang menurut definisi non-kalkulus, nilai MR ketika Q adalah 10. Nilai tersebut sesuai dengan atau mendekati nilai MR=80 saat Q=10 apabila dihitung dengan metode diferensiasi.

3. Biaya

Sejauh ini kita telah berkonsentrasi pada fungsi pendapatan total. Prinsip yang sama persis dapat digunakan untuk fungsi ekonomi lainnya. Misalnya, kita dapat mendefinisikan biaya marjinal, MC, dengan

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ}$$

Biaya marjinal adalah turunan dari biaya total (TC) sehubungan dengan output (Q).

Sekali lagi, menggunakan argumen geometris sederhana, mudah untuk melihat bahwa jika Q berubah dengan jumlah kecil ΔQ maka perubahan yang sesuai dalam TC diberikan oleh:

$$\Delta(TC) \simeq MCx\Delta Q$$

Perubahan pada TC	$\simeq$	Perubahan pada TC	x	Perubahan pada TC

Secara khusus, menempatkan Q = 1 memberikan

$$\Delta TC \simeq MC$$

Sehingga MC memberikan perkiraan perubahan TC ketika Q meningkat 1 unit.

Contoh:

Perusahaan sepatu PT Maju Jaya memiliki fungsi biaya total, $TC = Q^3 - 5Q^2 + 250Q + 1000$. Bagaimana persamaan fungsi *marginal costnya*?

Penyelesaian

MC = Turunan pertama dari TC

MC= TC'

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

$$TC = Q^3 - 5Q^2 + 250Q + 1000$$

$$MC = 3Q^2 10Q + 250$$

4. Marginal Utility

Utility dikaitkan dengan tingkat kepuasan yang dialami konsumen saat mengkonsumsi suatu barang. *Marginal utility* (MU) yaitu utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkaitan dengan satu unit tambahan barang yang dikonsumsinya (Dumairy, 2017: 226). Fungsi utilitas marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi utilitas total. Jika fungsi utilitas total dinyatakan dengan *U = f(Q)* di mana *U* melambangkan utilitas total dan *Q* adalah jumlah barang yang dikonsumsi, maka utilitas marjinalnya:

$$\boxed{MU = U' = dU/dQ}$$

Fungsi utilitas total biasanya berbentuk fungsi non linier. Oleh karena itu, fungsi *marginal utility* yang merupakan turunan pertama dari fungsi *total utility* menjadi fungsi linier. Kurva utilitas marjinal (*MU*) selalu mencapai nol tepat pada saat kurva utilitas total (*U*) berada pada posisi puncaknya.

Contoh soal

U = f(Q) = 100 Q – 5Q^2

MU = U' = 100 – 10 Q

U maksimum pada MU = 0

0 = 100 – 10Q

Q = 10

Umaksimum = 100(10) – 5(10)^2

Umaksimum = 1000 – 500

Umaksimum = 500

5. **Produk Marjinal**

Perusahaan akan menambah faktor produksi jika kegiatan produksi belum mencapai titik maksimum. Titik maksimum produksi dapat dilihat melalui konsep *marginal product* (MP). Produk marjinal (*marginal product, MP*) yaitu produk tambahan yang dihasilkan dari satu unit tambahan faktor produksi yang digunakan. Fungsi produk marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi produk total. Jika fungsi produk total dinyatakan dengan *P = f(X)* di mana *P* melambangkan jumlah produk total dan *X* adalah jumlah masukan, maka produk marjinalnya:

$$\boxed{MP = P' = dP/dX}$$

Kurva *marginal product* umumnya berbentuk parabolik, yang merupakan hasil dari turunan pertama fungsi *total product* yang berbentuk kubik. Kurva produk marjinal (MP) selalu mencapai nilai ekstrimnya, dalam hal ini nilai maksimum, tepat pada saat kurva produk total (P) berada pada posisi titik beloknya. Posisi tersebut mencerminkan berlakunya hukum tambahan hasil yang semakin berkurang (*the law of the diminishing return*). Produk total mencapai puncaknya ketika produk marjinalnya nol.

Contoh Kasus

PT Adil Sejahtera melakukan kegiatan produksi piring keramik dengan fungsi produksi total $Q = 3K^{2/3}L^{1/3}$. Berdasarkan fungsi produksi tersebut, tentukan MP_K dan MP_L.

Penyelesaian:

Produk marjinal:

$$MP_K = \frac{dQ}{dK} = \frac{2}{3}.3K^{-1/3}L^{1/3} = 2K^{-1/3}L^{1/3}$$

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = 3K^{2/3}\ {}^{1}\!/_{3}\,L^{-2/3} = 3K^{2/3}\ {}^{1}\!/_{3}\,L^{-2/3}$$

6. Analisis Keuntungan Maksimum

Konsep differensial dapat membantu analisis ekonomi untuk menentukan keuntungan maksimum dan kerugian minimum. Keuntungan dan kerugian merupakan bagian dari fungsi kuantitas (f(Q) yang diperoleh dari selisih antara penerimaan (TR) dan biaya (TC). Fungsi keuntungan dapat disimbolkan dengan π.

$$\pi = TR - TC$$

Perhitungan keuntungan maksimum dapat menggunakan konsep maksimisasi pada differensial. Keuntungan maksimum (nilai ekstrim) terjadi pada saat derivatif pertama π sama dengan nol.

$$\pi_{maksimum} = \pi' = 0$$

$$TR' - TC' = 0$$

$$MR - MC = 0$$

$$MR = MC$$

Jadi, keuntungan maksimum dapat dihitung menggunakan konsep differensial, yaitu terjadi ketika turunan pertama penerimaan sama dengan turunan pertama biaya totalnya. Kondisi tersebut sama halnya dengan keuntungan maksimum terjadi pada saat *marginal revenue* sama dengan *marginal cost.*

Contoh Kasus:

Sebuah perusahaan monopoli menghadapi kurva permintaan dengan persamaan $Q = 60 - P$, dan biaya total dengan persamaan $TC = 10Q^2 - 75Q + 15$.
Hitunglah harga yang memaksimumkan laba.

Penyelesaian:

Laba maks terjad saat MR = MC

TR = Q (60-Q) = $60Q - Q^2$

MC = MR

20Q-75 = 60-2Q

22Q = 135

Q = 6,14

Masukkan Q ke dalam fungsi perimintaan untuk mencari tingkat harga (P).

Q = 60-P

6,14 = 60-P

P = 60 – 6,14 = 53,8

BAB 5

INTEGRAL

A. Konsep Integral

Salah satu cabang dari ilmu matematika yang memiliki peranan penting dalam penerapan ilmu ekonomo yaitu integral. Integral digunakan untuk menentukan sebuah area secara lebih akurat dan cepat. Mengintegralkan suatu fungsi turunan *f(x)* berarti mencari integral atau turunan-antinya (fungsi asal), yaitu f(x). Integral dalam kalkulus dikenal dua macam pengertian integral, mereka adalah integral tak tentu *(indefinite integral)* dan integral tertentu *(definite integral).*

1. Integral Tak Tentu

Integral tak tentu merupakan kebalikan dari konsep diferensial, yaitu konsep yang berhubungan dengan proses penemuan suatu fungsi asal apabila turunan atau derivatif dari fungsinya diketahui (Dumairy, 2017).

$$\int f(x)dx = f(x) + k$$

Proses penemuan fungsi asal dapat dilakukan dengan langkah berikut ini.

Fungsi asal : $F(x) = x^3 + 8$

Fungsi turunannya : $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 3x^2$

Apabila fungsi turunan $3x^2$ diintegralkan, maka:

$$\int f(x)dx = f(x) + k$$

$$\int 3x^2 = x^3 + k$$

Proses integrasi memiliki kaidah-kaidah tertentu sesuai dengan sifat yang dimiliki oleh masing-masing fungsi.

Tabel 7. Kaidah-kaidah integral tak tentu

No	Kaidah	Rumus
a.	Formula Pangkat	$\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ n≠-1
b.	Formula Logaritmis	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$
c.	Formula Eksponensial	$\int e^x\, dx = e^x + x$ $\int e^x\, du = e^x + k$ $u = f(x)$
d.	Formula Penjumlahan	$\int \{(x) + g(x)\}\, dx$ $= \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ $= F(x) + G(x) + k$
e.	Formula Perkalian	$\int n\, f(x)\, dx = n \int f(x)\, dx$
f.	Formula Substitusi	$\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u)\, du = F(u) + k$ Dimana $u = g(x)$, dan $\int du$ merupakan substitut bagi $\int dx$

2. Intergral Tak Tentu dalam Ekonomi

a. Fungsi Biaya

Integral dalam fungsi biaya berperan untuk menemukan fungsi asal biaya (TC) dari fungsi marginalnya (MC).

Jika:

$$TC = f(Q)$$

Maka:

$$MC = TC' = \frac{dTC}{dQ} = f'(Q)$$

Sehingga:

$$TC = \int MC\,dQ = \int f(Q)\,dQ$$

Contoh:

Sebuah perusahaan memiliki fungsi biaya $MC = 3Q^2 - 8Q + 10$. Bagaimana fungsi asal biaya total dan biaya rata-ratanya?

1) **Biaya total**

TC= $\int MC\,dQ$, kita dapat menggunakan kaidah formula pangkat $\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

$$TC = \int (Q^2 - 8Q + 10)\,dQ$$

$$TC = \frac{3Q^{2+1}}{2+1} - \frac{5Q^{1+1}}{1+1} + 10Q + k$$

$$TC = \frac{3Q^3}{3} - \frac{8Q^2}{2} + 10Q + k$$

$$TC = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + k$$

2) **Biaya rata-rata**

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{Q^3 - 4Q^2 + 10Q + k}{Q}$$

$$AC = Q^2 - 4Q + 10 + \frac{k}{Q}$$

Fungsi biaya (TC) di atas memiliki konstanta (k) yang merupakan unsur biaya tetap (TFC). Apabila perusahaan tersebut memiliki biaya tetap sebesar 50, maka persamaan biaya total akan menjadi:

$$TC = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 50$$

Biaya *rata*-rata baru setelah ditemukannya biaya total baru menjadi:

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 50}{Q}$$
$$AC = Q^2 - 4Q + 10 + \frac{50}{Q}$$

b. Fungsi Penerimaan

Integral dalam fungsi penerimaan memiliki fungsi untuk menentukan fungsi penerimaan total (TR) apabila yang diketahui adalah persamaan penerimaan marjinal (*marginal revenue*/MR).

$$TR = f(Q)$$
$$MR = TR' = \frac{dTR}{dQ} = f(Q)$$

Sehingga, penerimaan total merupakanintegral dari penerimaan marginal.

$$TR = \int MR\, dQ = \int f(Q)dQ$$

Contoh:

Perusahaan Tahu Makmur Jaya memiliki fungsi penerimaan marginal $MR = 48 - 10Q$. Bagaimanakah fungsi penerimaan total dan penerimaan rata-ratanya?

Penerimaan total:

$TR = \int MR\, dQ$, gunakan kaidah formula pangkat $\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

$$TR = \int (48 - 10Q)\, dQ$$

$$TR = 48Q - \frac{10Q^{1+1}}{1+1}$$

$$TR = 48Q - \frac{10Q^2}{2}$$

$$TR = 48Q - 5Q^2$$

Penerimaan rata-rata (AR) menjadi:

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{48Q - 5Q^2}{Q}$$

$$AR = 48 - 5Q$$

Penerimaan rata-rata disebut juga sebagai fungsi harga (P). Konstanta pada fungsi penerimaan bernilai nol (*k=0*) dikarenakan fungsi penerimaan akan selalu bergantung pada jumlah barang yang dijual (Q). Apabila tidak ada barang yang dijual, maka tidak tercipta fungsi penerimaan.

3. Integral Tentu

Integral tentu yaitu integral dari suatu fungsi yang nilai variabel bebasnya memiliki batas-batas tertentu. Integral tentu digunakan untuk menentukan luas area kurva tertentu dalam sumbu absis dan ordinat dari batas-batas yang sudah ditentukan. Misalnya, kurva pada sumbu y=f(x) dan sumbu x dalam suatu rentangan wilayah yang dibatasi oleh x=a dan x=b.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

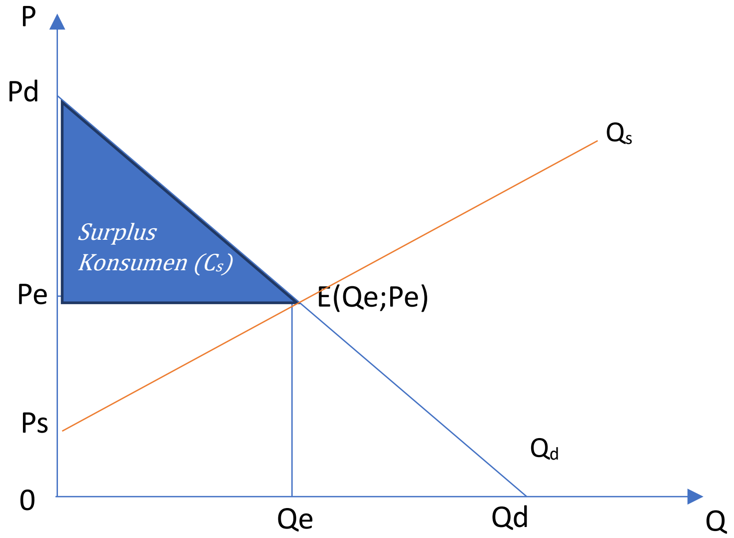
$$\int_3^5 3x^2 = [x^3]_2^5 = (5^3) - (2^3)$$

$$\int_3^5 3x^2 = 125 - 8 = 118$$

4. Integral Tentu dalam Ekonomi

a. Surplus Konsumen

Surplus konsumen merupakan suatu kondisi yang menguntungkan bagi konsumen dikarenakan memiliki daya beli di atas harga keseimbangan. Kondisi tersebut dapat dilihat dari kurva fungsi permintaan *P=f(Q)* di bawah ini.



Gambar 30. Kurva surplus konsumen

Surplus konsumen ditunjukkan oleh area yang terarsir. Harga yang tercipta di pasar sebesar Pe. Namun, konsumen yang berada diatas keseimbangan Pe mampu sebenarnya mampu membayar lebih dari harga tersebut. Kondisi tersebut yang seolah-olah menguntungkan konsumen untuk membeli barang dibawah daya beli yang dia miliki.

Surplus konsumen dalam bentuk fungsi permintaan *P=f(Q)* dapat dihitung dengan rumus:

$$C_s = \int_{0}^{Qe} f(Q)dQ - Q_e P_e$$

Sedangkan, fungsi permintaan dalam bentuk *Q=f(P)* dapat dihitung dengan rumus:

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{p}} f(P)dP$$

Contoh:

Diketahui fungsi permintaan jeruk $Q = 60 - 3P$ yang tingkat harga pasarnya Pe=12. Hitunglah surplus konsumen dari kondisi tersebut.

Penyelesaian:

$Q = 60 - 3P$

Pd	Qd
0	60
20	0
12	24

Fungsi permintaan di atas dalam bentuk fungsi *Q=f(P),* maka rumus yang digunakan untuk menghitung area surplus konsumen menggunakan kaidah

$$C_s = \int_{P_e}^{\hat{p}} f(P)dP$$

$$C_S = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)dP = \int_{12}^{20} (60 - 3P)dP$$

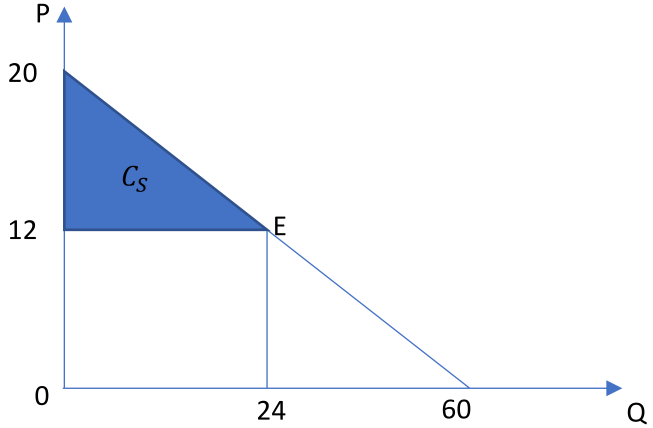
$$C_S = \left[60P - \frac{3}{2}P^2\right]_{12}^{20}$$

$$C_s = \left(60(20) - 60(12)\right) - ((\frac{3}{2}(20^2) - \left(\frac{3}{2}(12^2)\right)$$

$$C_s = (1200 - 720) - ((\frac{3}{2}(400) - \left(\frac{3}{2}(144)\right)$$

$$C_s = (480) - (600 - (216)$$

$$C_s = (480) - 384 = 96$$

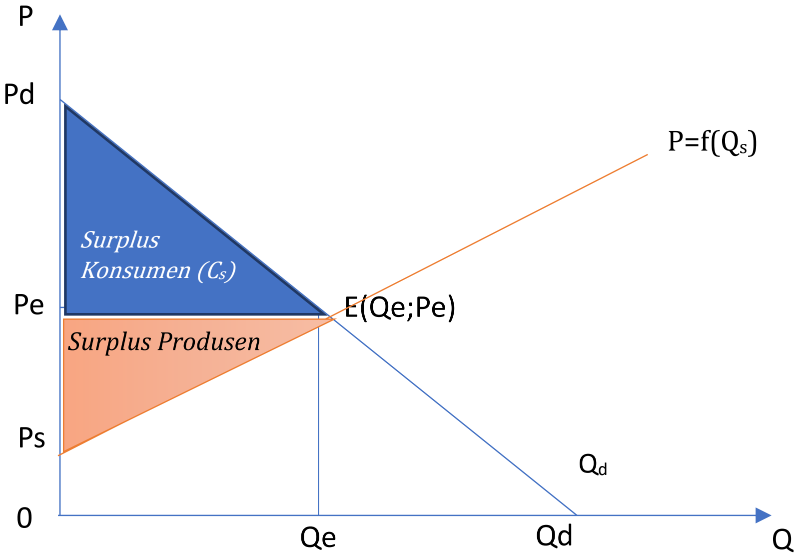


Gambar 31. Kurva surplus konsumen permintaan jeruk.

Jadi surplus konsumen fungsi permintaan $Q = 60 - 3P$ yang tingkat harga pasarnya Pe=12 yaitu 96.

b. Surplus Produsen

Surplus produsen yaitu kondisi menguntungkan yang dihadapi oleh produsen dikarenakan memiliki daya jual di bawah harga pasar.



Gambar 32. Kurva surplus produsen.

Kurva $P=f(Q_s)$ menunjukkan fungsi penawaran yang merupakan jumlah barang yang akan dijual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Harga di bawah harga keseimbangan (Pe) mencerminkan bahwa produsen dengan biaya produksi tertentu mampu menjual dengan harga di bawah harga pasar. Kondisi ini mengakibatkan produsen memiliki surplus atau seolah-olah diuntungkan atas situasi tersebut.

Surplus produsen dalam bentuk fungsi penawaran *P=f(Q)* dapat dihitung dengan rumus:

$$P_s = \int_{0}^{Qe} f(Q)dQ - Q_e P_e$$

Sedangkan, fungsi penawaran dalam bentuk *Q=f(P)* dapat dihitung dengan rumus:

$$P_s = \int_{P_e}^{\hat{p}} f(P)dP$$

Contoh;

Produsen Tempe Multi Sehat memiliki fungsi penawaran $P = 3Q + 15$. Apabila tingkat harga keseimbangan tempe adalah 75, berapakah surplus produsen yang dihadapi?

Penyelesaian

$P = 3Q + 15$ atau $Q = \frac{1}{3}P - 5$

Ps	Qs
75	25
15	0

Fungsi penawaran di atas merupakan fungsi dalam bentuk *P=f(Q),* maka kaidah yang digunakan untuk menentukan besarnya surplus produsen yaitu:

$$P_s = Q_e P_e - \int_{0}^{Q_e} f(Q)\, d(Q)$$

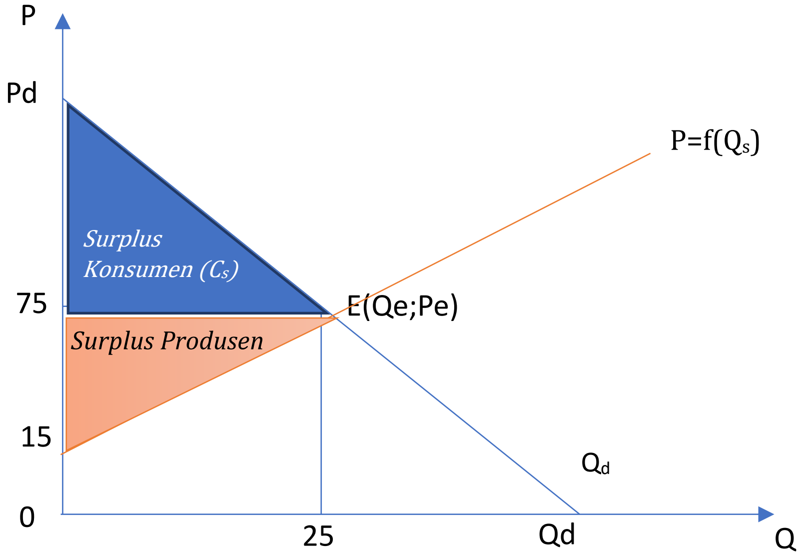
$$P_s = (25)(75) - \int_{0}^{25} 3Q + 15$$

$$P_S = \left[\frac{3}{2}Q^2 - 15Q\right]_0^{25}$$

$$P_s = 1875 - \left(\frac{3}{2}(25^2) - 15(25)\right) - \left(\frac{3}{2}(0^2) - 15(0)\right)$$

$$P_s = 1875 - (937{,}5 - 375) - (0)$$

$$P_s = 562{,}5$$



Gambar 33. Kurva surplus produsen penawaran tempe.

Jadi besarnya surplus konsumen pada fungsi penawaran $P = 3Q + 15$ dengan harga pasar 75 yaitu 562,5.

MATRIKS

A. Konsep Matriks

Bab terakhir dalam buku ini membahas tentang dasar-dasar matriks dan penerapannya dalam ekonomi. Matriks merupakan kumpulan bilangan, variabel, atau parameter yang disajikan secara terurut dalam baris dan kolom yang berbentuk empat persegi panjang dan termuat dalam kurung biasa ( ), atau kurung siku [ ], atau di antara dua pasang garis tegak rangkap (Wirawan, 2016) . Bilangan, variabel atau parameter di dalam tanda kurung itu, disebut anggota (elemen/unsur) dari suatu matriks. Ilustrasi matriks dalam fenomena ekonomi dapat diperlihatkan pada tabel berikut:

Tabel 8. Gross Domestic Product (GDP)

Negara	Gross Domestic Product (GDP)		
	2018	2019	2020
Negara A	256	297	305
Negara B	350	356	364
Negara C	247	287	300
Negara D	285	304	325

Data GDP negara-negara di atas jika disajikan dalam bentuk matriks akan tampak seperti berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 256 & 297 & 305 \\ 350 & 356 & 364 \\ 247 & 287 & 300 \\ 285 & 304 & 325 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut dapat kita namakan sebagai matriks GDP. Matriks GDP memiliki baris sebanyak 4 (jajaran horizontal) dan kolom sebannyak 3 (jajaran verikal). Baris dikalikan dengan kolom matriks dikenal dengan dimensi atau orde matriks. Matriks secara umum memiliki unsur-unsur dibawah ini.

$$A = \|a_{ij}\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks secara umum memiliki unsur-unsur yang dilambangkan dengan notasi a_{ij}, dimana i menunjukkan baris dan j menunjukkan kolom dalam matriks. Dengan kata lain, notasi a_{ij} pada matriks A di atas dimisalkan dengan a_{mn}. Dimensi atau orde pada matriks di atas dapat dirumuskan dengan perkalian antara jumlah baris dan kolom, yaitu;

$$Dimensi\ Matriks = m\ x\ n$$

Secara sederhana penotasian matriks dapat disajikan seperti di bawah ini.

$$A = (a_{ij}) = [a_{ij}]$$

Atau

$$A_{mxn} = (a_{ij})_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$$

B. Jenis – Jenis Matriks

1. Matriks Bujur Sangkar

Matrik yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama disebut sebagai matriks bujur sangkar atau *square matrix.* Contoh matriks bujur sangkar yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2. **Vektor**

Vektor berkaitan erat dengan matriks. Vector yaitu matriks yang hanya memiliki satu kolom atau satu baris saja. Sedangkan, matriks terdiri dari kumpulan beberapa vektor.

Contoh vector

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Contoh matriks

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks sekolom seperti pada vektor ***a*** berorde *m x 1* disebut sebagai vektor kolom. Sedangkan, matrik sebaris seperti pada vektor ***b*** yang berorde *1 x n* disebut sebagai vektor baris. Matriks C memiliki orde atau dimensi *3 x 2,* dan matriks D memiliki dimensi *2 x 3.* Dua atau lebih matriks dikatakan sama jika dimensi dan unsur-unsurnya sama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A=B, A≠C, B≠C, dan C≠D. Matriks A dan B dikatakan sama karena sama-sama memiliki dimensi *2 x 2,* dan unsur-unsurya sama.

3. Matriks Identitas

Matriks indentitas atau matriks satuan yaitu matriks bujur sangkar yang elemen - elemennya bernilai 1 (satu) pada diagonal utama (diagonal dari kiri atas ke kanan bawah) dan nol diluar diagonal utama. Penulisan Matriks indentitas biasa disimbolkan dengan lambing $\boldsymbol{I}_n$. Indeks *n* dalam matriks identitas mencerminkan orde.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} atau \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} atau \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan suatu matriks bujur sangkar yang seluruh unsur diluar diagonal utama bernilai nol dan paling tidak satu elemen pada diagonal utama tidak sama dengan nol.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas (*upper tringular*) yaitu matriks bujur sangkar yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol. Dengan kata lain, nilai elemen-elemen segitiga atas atau diagonal utamanya tidak nol, yang lainnya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah (lower tringular) adalah matriks bujur sangkar yang memiliki elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol. Dengan kata lain, nilai elemen-elemen segitiga

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Nol

Matriks nol adalah suatu matriks yang semua elemennya bernilai nol. Matriks nol umumnya diberi simbol 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} atau \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} atau \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Baris

Matriks baris yaitu suatu matriks yang hanya memiliki satu baris saja. Matriks baris juga disebut vektor baris.

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

9. **Matriks Transpose**

Matriks transpose atau matriks putar adalah suatu matriks yang dibentuk dengan cara memutar baris ke-i suatu matriks, menjadi kolom ke-i matriks transpose. Misalnya : baris ke-2 matriks semula diputar dan akan menjadi kolom ke-2 matriks transpose. Transpose dari matriks

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \; ditranspose \; B' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

10. **Matriks Simetris**

Matriks simetris atau matriks yang setangkup adalah suatu matriks yang transposenya sama dengan matriks semula.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ditranspose \; A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. **Matriks Singular dan Tan-Singular**

Matriks singular adalah matriks bujur sangkar yang nilai determinannya nol. Sedangkan matriks bujur sangkar yang nilai determinannya tidak sama dengan nol disebut matriks yang tan– singular/nonsingular.

12. **Kesamaan Matriks**

Matriks A dan B dikatakan sama, ditulis A = B, apabila ordenya sama dan elemen-elemen yang seletak juga sama.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -5 & -20 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Kesimpulan ketiga matriks di atas yaitu:

A=B≠C

C. Operasi Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Ketentuan matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila dua matriks apabila kedua matriks tersebut memiliki orde sama. Pola pengerjaan operasi penjumlahan dan pengurangan matriks, yaitu dengan menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang seletak (posisi sama). Matriks baru setelah proses operasi penjumlahan atau pengurangan, memiliki orde yang sama dengan orde matriks-matriks yang dijumlahkan/ dikurangkan.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} +/- \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ q_{31} & q_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{bmatrix}$$

A	B	C
orde 3x2	orde 3x2	orde 3x2

Contoh

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -5 & -20 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C - D = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -9 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -4 & -20 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 20 \\ 9 & 11 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Perkalian Skalar dengan Matriks

Matriks dapat dikalikan dengan skalar tertentu, dimana elemen – elemen matriks barunya diperoleh dari mengalikan setiap elemen matriks A dengan k. Hasil kali matriks A dengan skalar k dapat ditulis kA. Perkalian skalar k dengan matriks A berdimensi m x n, secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$kA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & a_{13} & . & . & . & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & a_{23} & . & . & . & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & a_{33} & . & . & . & ka_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & . & . & . & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks baru hasil perkalian matriks dengan skalar akan memiliki dimensi yang sama dengan matriks awal.

Contoh

Perkalian matriks P dengan skalar 4

$$P = 4 \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 40 \\ 20 & 80 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

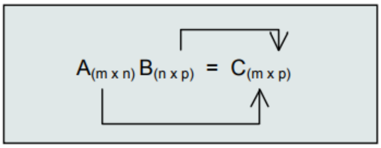
Perkalian matriks R dengan scalar 0,5

$$R = 0{,}5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4,5 & 4 & 0,5 & 0 \\ 1,5 & 1,5 & 2 & 2,5 \end{bmatrix}$$

3. **Perkalian Matriks dengan Matriks**

   Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B apabila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B. Perkalian matriks A yang berdimensi m x n dan matriks B yang berdimensi n x p akan menghasilkan matriks yang berdimensi hasil kali keduanya (matriks AB = C) adalah m x p. Ilustrasi perkalian antar matriks dapat dilihat sebagai berikut:



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2x3} \; dikalikan\ B \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

Perkalian AB menjadi:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2X3} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$$

Elemen – elemen matriks C diperoleh dari:

$$c_{11} = \big((a_{11})(b_{11})) + ((a_{12})(b_{21})) + ((a_{13})(b_{31})\big)$$

$$c_{21} = \big((a_{21})(b_{11})) + ((a_{22})(b_{21})) + ((a_{23})(b_{31})\big)$$

$$c_{12} = \big((a_{11})(b_{12})) + ((a_{12})(b_{22})) + ((a_{13})(b_{32})\big)$$

$$c_{22} = \left((a_{21})(b_{12})\right) + \left((a_{22})(b_{22})\right) + \left((a_{23})(b_{32})\right)$$

Contoh

Diketahui

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Perkalian AB tidak dapat didefisinikan karena jumlah kolom matriks A tidak sama dengan jumlah baris matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 26 & 2 & 30 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Perkalian Matriks

(1) ABC = (AB)C = A(BC)
(2) A(B + C) = AB + AC

(3) AB ≠ BA, dalam keadaan khusus bila AB = BA kedua matriks disebut Commute.

4. **Pemangkatan Matriks**

Bila A adalah matriks bujur sangkar berorde n (n bilangan asli), maka berlaku:

$$A^n = \underbrace{A.A.A....A}_{nkali}$$

Contoh

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 33 & 11 \end{bmatrix}$$

D. Aplikasi Matriks dalam Bisnis dan Ekonomi

Studi kasus

Sebuah industri bakery yang khusus memproduksi brownies (b), bolu gulung (g) dan donat (d), dalam seminggu menyalurkan produknya melalui tiga toko eceran (toko 1, 2 dan 3). Toko eceran 1 memiliki persediaan 30 brownies, 40 bolu gulung, dan 60 donat. Toko eceran 2 memiliki persediaan 50 brownies, 60 bolu gulung, dan 20 donat.Toko eceran 3 memiliki 25 brownies, 10 bolu gulung dan 70 donat. Bila harga jual per unit (dalam puluhan ribu rupiah) untuk brownies adalah 2, bolu gulung adalah 1 dan donat adalah 1,5.

1) Nyatakanlah persediaan bakery tersebut (Q) dalam bentuk matriks.

2) Nyatakanlah harga-harga jual produk bakery tersebut (P) dalam bentuk matriks.
3) Jika semua persediaan tersebut terjual habis, hitunglah total penjualan dari persediaan produk bakery tersebut (R) pada masing - masing toko eceran melalui operasi matriks.

Penyelesaian

1) Matriks persediaan produk bakery (Q)

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} b & g & d \end{array} \\ \begin{array}{r} Toko\ 1 \\ Toko\ 2 \\ Toko\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 40 & 60 \\ 50 & 60 & 20 \\ 25 & 10 & 70 \end{bmatrix} \end{array} atau\ Q = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 60 \\ 50 & 60 & 20 \\ 25 & 10 & 70 \end{bmatrix}$$

2) Matriks harga jual (P)

$$P = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} b \\ g \\ d \end{array} \end{array}$$

3) Total penjualan dari masing-masing toko eceran

Total penjualan=*Total Revenue (TR)*

$$\begin{bmatrix} TR_1 \\ TR_2 \\ TR_3 \end{bmatrix} = QP = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 60 \\ 50 & 60 & 20 \\ 25 & 10 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Matriks *total revenue* (TR) dapat didefisinikan karena jumlah kolom matriks P sama dengan jumlah baris matriks Q yaitu 3.

$$QP = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 60 \\ 50 & 60 & 20 \\ 25 & 10 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190 \\ 190 \\ 165 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan penyelesaian matriks produk bakery di atas, dapat disimpulkan bahwa total penerimaan penjualan (TR) masing – masing toko eceran 1, 2, dan yaitu 190, 190, 165 (dalam puluhan ribu rupiah).

E. Determinan Matriks

1. Matriks Dalam Analisis Input-Output

Analisis Input-Output meruapakan suatu model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling kait mengait antar sektor atau kegiantan ekonomi. Masing-masing sektor menggunakan keluaran dari sektor lain sebagai masukan bagi keluaran yang akan dihasilkannya, kemudian keluaran yang dihasilkannya merupakan masukan pula bagi sector lain.

Tahap awal analisis input-output yaitu menyusun suatu tabel yang menerangkan bagaimana output suatu sektor terdistribusi ke (diminta oleh) sector lain sebagai input dan ke (oleh) pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Tabel tersebut disebut sebagai matriks transaksi atau matriks input-output.

a. Matriks Transaksi

Berikut ini contoh matriks transaksi negara X (Dumairy, 2017).

Tabel 9. Matriks Transaksi

Keluaran / Masukan	Pertanian	Industri	Jasa akhir	Permintaan total	Keluaran
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290

Jasa	10	50	55	120	235
Nilai tambah	55	125	115	70	365
Keluaran total	100	290	235	365	990

keterangan:

1) Nilai tambah: tambahan nilai suatu komoditas akibat dari adanya aktivitas ekonomi. Kapas, benang, kain, baju.
2) Tabel ke samping menjelaskan seluruh output sektor pertanian senilai 100 dengan ketentuan **20 digunakan oleh sektor itu sendiri sebagai input.**
    a) 35 digunakan oleh sector industry sebagai input
    b) 5 diguanakan sebagai input sector jasa
    c) 40 dibeli oleh konsumen akhir sebagai barang konsumsi
3) Tabel ke bawah berarti menjelaskan seluruh input sector pertanian senilai 100, dengan ketentuan:
    a) 20 berupa input dari sector itu sendiri
    b) 15 berupa masukan yang berasal dari sector industri
    c) 10 berupa masukan dari sector jasa
    d) 55 merupakan nilai tambah sector pertanian, nilai tambah sering disebut juga masukan primer *(primary input)*

b. Notasi Matriks Tabel Transaksi

Tabel 10. Notasi Matriks Tabel Transaksi

Keluaran / Masukan	Pertanian	Industri	Jasa akhir	Permintaan total	Keluaran
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai tambah	55	125	115	70	365
Keluaran total	100	290	235	365	990

Misal :

- ❖ X_{ij} melambangkan output sector *i* yang digunakan sebagai input oleh sector *j*
- ❖ U_i melambangkan permintaan akhhir terhadap output sector *I*
- ❖ Y_j melambangkan nilai tambah sector *j*
- ❖ X_j melambangkan output total sector *j*

Maka, penyusunan matriks transaksi menjadi:

Tabel 11. Notasi Matriks Tabel Transaksi

	Distribusi Konsumsi	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Distribusi	x_{11} x_{12} … … … … … … … x_{1m}	U_1	X_1
Produksi	x_{21} x_{22} … … … … … … … x_{2m}	U_2	X_2
	: :	:	:
	: :	:	:
	x_{11} x_{12} … … … … … … … x_{1m}	U_m	X_m
Nilai tambah	Y_1 Y_2 … … … … … … … … Y_m	Y_{m+1}	X_{m+1}
Keluaran total	X_1 X_2 … … … … … … … … X_m	X_{m+1}	x

Pemakaian total oleh sector *i*:

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + U_i \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots,\ m+1$$

Keluaran total dari sector *j*:

$$X_j = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} + Y_i \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots m+1$$

Jika permintaan akhir masing-masing 100, 300, dan 200, maka keluaran total?

$$\begin{array}{l} \\ Pertanian \\ Industri \\ Jasa \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & I & J \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}12 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}23 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Rumus $X = (I - A)^{-1}U$ (pembalikan matrik= sistem adjoin dan determinan)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}20 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 1 - 0{,}28 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & 0{,}17 & 1 - 0{,}23 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

c. **Penyelesaian** Matriks Determinan

1) Rumus

$$X = (I - A)^{-1}U$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}20 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 1 - 0{,}28 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & 0{,}17 & 1 - 0{,}23 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

2) **Determinan**

$$\begin{aligned} |I - A| = (0{,}80)(0{,}72)(0{,}77) \\ + (-0{,}12)(-0{,}26)(-0{,}10) \\ + (-0{,}02)(-0{,}15)(-0{,}17) \\ - (-0{,}10)(0{,}72)(-0{,}02) \\ - (-0{,}15)(-0{,}12)(0{,}77) \\ - (0{,}80)(-0{,}17)(-0{,}26) = 0{,}38923 \end{aligned}$$

3) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\boldsymbol{adj}.(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$

$$\begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5102 & 0{,}0958 & 0{,}0456 \\ 0{,}1415 & 0{,}6140 & 0{,}2111 \\ 0{,}0975 & 0{,}1480 & 0{,}5589 \end{bmatrix} : 0{,}38923$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}3108 & 0{,}2461 & 0{,}1171 \\ 0{,}3635 & 1{,}5775 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3802 & 1{,}4336 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}3108 & 0{,}2461 & 0{,}1171 \\ 0{,}3635 & 1{,}5775 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3802 & 1{,}4336 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228{,}33 \\ 618{,}02 \\ 425{,}83 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, jika sektor pertanian, industri dan jasa masing-masing memiliki target permintaan akhir 100, 300, 200, maka akan menghasilkan output:

Pertanian :228,33
Industry :618,02
Jasa :425,83

DAFTAR PUSTAKA

Assauri, Sofjan. 2013. Matematika Ekonomi. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.

Batafor, Gregorius. 2018. Matematika Ekonomi. Manggu Makmur Tanjung Lestari: Bandung

Dumairy. 2017. Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi. BPFE: Yogyakarta

Hamid, Edy S dan Ilham H.M. 2019. *Pengantar Ekonomika Mikro.* Yogyakarta: UPP STIM YKPN

Hidayati, Syafaatul.2019. *Teori Ekonomi Mikro.* Tangerang Selatan: UNPAM PRESS

Jacques, Ian. 2006. Mathematics for Economics and Business. Pearson Education Limited: England

KBBI online https://kbbi.web.id/elastis).

Nata Wirawan, 2016. MATEMATIKA EKONOMI LANJUTAN. Keraras Emas Denpasar.

Nata Wirawan, 2016. MATEMATIKA EKONOMI LANJUTAN. Keraras Emas Denpasar.

Rasul, Agung Abdul. 2003. *Ekonomi Mikro Jilid 2.* Jakarta: Mitra Wacana Media

Rosyidi, Suherman. 2012. *Pengantar Teori Ekonomi*, PT Raja Grafindo Persada, Jakarta

Sunyoto, Danang dan Henry Sarnowo. 2013. Matematika untuk Ekonomi dan Keuangan. CAPS: Yogyakarta